ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
СТАВРОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И РЯДЫ

Учебное пособие

г. Ставрополь
2021

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. Дифференциальные уравнения 1-го порядка. Метод изоклин. Получение ДУ по общему решению

1.1. Метод изоклин решения дифференциального уравнения первого порядка

Дадим геометрическую интерпретацию дифференциального уравнения первого порядка. Пусть дано дифференциальное уравнение, разрешенное относительно производной:

$$y' = f(x,y), \tag{1}$$

и пусть $y = \varphi(x,C)$ есть общее решение данного уравнения. Это общее решение определяет семейство интегральных кривых на плоскости *Oxy.*

Уравнение (1) для каждой точки *M* с координатами *x* и *y* определяет значение производной $y' = tg\alpha = k$, т.е. угловой коэффициент касательной к интегральной кривой, проходящей через эту точку. Таким образом, *дифференциальное уравнение* (1) *определяет* ***поле направлений*** на плоскости *Oxy.*

Для дифференциального уравнения (1) геометрическое место точек, в которых выполняется соотношение $y' = k = const$, называется ***изоклиной*** данного дифференциального уравнения.

При различных значениях ***k*** получаем различные изоклины. Уравнение изоклины, соответствующей значению ***k***, будет, очевидно, $f(x,y) = k$**.** Построив семейство изоклин, можно приближенно построить семейство интегральных кривых на плоскости.

Пример 1. На рисунке 1 изображено поле направлений, определяемое дифференциальным уравнением

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \tag{2}$$

Изоклинами данного дифференциального уравнения являются $-\frac{y}{x} = k$**,** или $y = -kx$**.** Это семейство прямых. Они построены на рис.1.

Нулевая изоклина $f(x,y) = 0$ дает уравнение линии, на которой могут находиться точки экстремумов интегральных кривых, если эта изоклина не является интегральной кривой. В противном случае нарушаются условия теоремы существования и единственности во всей плоскости xOy.

Теорема существования и единственности решения задачи Коши.

Задача Коши

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{3}$$

в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) *имеет решение если функция* $f(x,y)$ *определена и непрерывна в этой окрестности. Если вдобавок определена и непрерывна производная* $f'_y(x,y)$*, то это решение единственно.*

Для ДУ (2) нулевая изоклина $y = 0$ является интегральной кривой, поскольку подстановка $y = 0$ в уравнение (2) обращает последнее в тождество. Поэтому нулевая изоклина для этого ДУ не является геометрическим местом экстремумов интегральных прямых (см. рис.1).

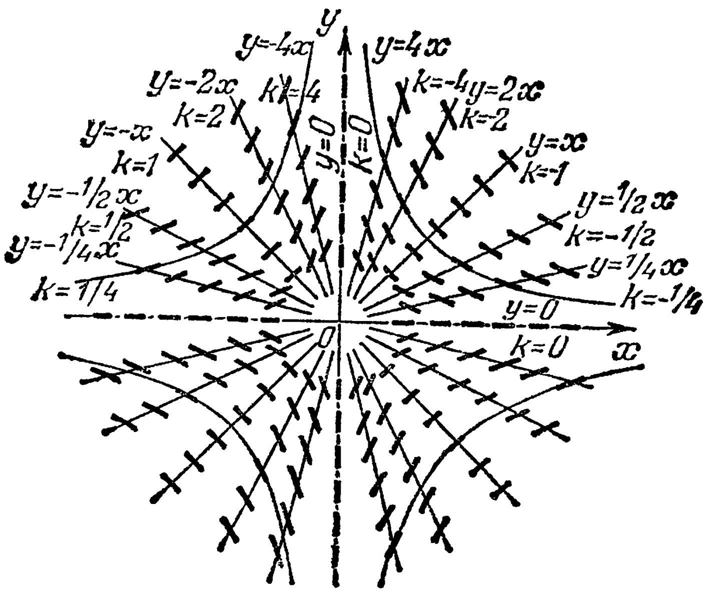


Рисунок 1 - Поле направлений для ДУ (2)

Для большей точности построения интегральных кривых находят также геометрическое место точек перегиба, в которых $y''=0$. Для этого находят y'' в силу уравнения (1) и приравнивают ее нулю:

$$y''=\frac{df}{dx}+\frac{df}{dy}y'=\frac{df}{dx}+f(x,y)\frac{df}{dy}=0 \tag{4}$$

Линия, определяемая этим уравнением и есть возможное геометрическое место точек перегиба.

Пример 2. С помощью изоклин построить приближенно интегральные кривые дифференциального уравнения $y'=2x-y$.

Решение. Для получения уравнения изоклин положим $y'=k=const$,

$2x-y=k$, или $y=2x-k$.

Изоклинами являются параллельные прямые. При $k=0$ получим изоклину $y=2x$, которая не является интегральной кривой рассматриваемого ДУ (подстановка уравнения изоклины в ДУ не обращает его в тождество). Значит на этой прямой находятся точки экстремума интегральных кривых, а именно точки минимума (рис. 2).

Возьмем еще две изоклины: $y=2x+1$, $k=-1$ и $y=2x-1$, $k=1$.

Касательные, проведенные к интегральным кривым в точках пересечения с изоклинами $k=-1$ и $k=1$, образуют с осью *Ox* углы в 135^0 и 45^0 соответственно. Найдем далее вторую производную $y''=2-y'=2-2x+y$.

Прямая $y=2x-2$*, на которой* $y''=0$*, является изоклиной, получаемой при* $k=2$*, и в то же время интегральной линией*, в чем можно убедиться подстановкой в уравнение.

$$y'=2;\to 2=2x-y=2x-(2x-2)=2;\to 2=2.$$

Значит, эта линия не определяет точки перегиба интегральных кривых, так как правая часть данного уравнения $f(x,y)=2x-y$ удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности во всей плоскости xOy, и *остальные интегральные кривые не могут пересекать эту линию. Интегральные кривые данного уравнения не имеют точек перегиба.*

Нулевая изоклина $y=2x$, на которой находятся точки минимума интегральных кривых, расположена над линией $y=2x-2$, а поэтому интегральные кривые, проходящие ниже $y=2x-2$, не имеют точек экстремума.

Прямая $y=2x-2$ делит плоскость xOy на две части, в одной из которых (расположенной над прямой) $y''>0$, а значит, интегральные кривые вогнуты, а в другой $y''<0$ и, значит, интегральные кривые выпуклы (см. рис. 2).

Пример 3. Методом изоклин построить интегральные кривые уравнения $y' = y - x^2 + 2x - 2$.

Решение. Положим $y'=k,\ k=const$. Тогда уравнение изоклин будет

$y-x^2+2x-2=k$, или $y=x^2-2x+2+k=(x-1)^2+1+k.$

Изоклинами являются параболы с вертикальной осью симметрии $x = 1$. *Среди изоклин нет интегральных кривых.* В самом деле, подставляя в данное уравнение $y=x^2-2x+2+k$ и $y'=2x-2$, будем иметь $2x-2=x^2-2x+2+k-x^2+2x-2$, или $2x-2=k$. Но это равенство ни при каком значении k не может выполняться тождественно относительно x.

Правая часть исходного уравнения $f(x,y)=y-x^2+2x-2$ во всех точках плоскости xOy удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности, поэтому через каждую точку плоскости проходит единственная интегральная кривая уравнения.

Пусть $k=0$. Тогда в точках пересечения с изоклиной $y = x^2 - 2x + 2$ интегральные кривые будут иметь горизонтальные касательные. *И так как эта изоклина не является интегральной кривой, то на ней находятся точки экстремума интегральных кривых*, именно на той части параболы $y=x^2-2x+2=(x-1)^2+1$, где $x < 1$ — точки минимума, а на другой части этой параболы, где $x > 1$ — точки максимума. Интегральная кривая, проходящая через точку $(1;\ 1)$, т.е. через вершину параболы $y = x^2-2x+2$, в этой точке не имеет экстремума. В точках изоклин $y = x^2-2x+3$, $k = 1$ и $y = x^2-2x+1$, $k = -1$ касательные к интегральным кривым имеют угловые коэффициенты, соответственно равные 1 и -1 (см. рис. 3).

Для исследования направления вогнутости интегральных кривых найдем вторую производную:

$$y'' = y'-2x+2 = y-x^2+2x-2-2x+2 = y - x^2.$$

Она обращается в нуль только в точках, лежащих на параболе $y=x^2$. *Уравнение* $y=x^2$ *не является решением исходного ДУ, следовательно кривая* $y=x^2$ *определяет геометрическое место точек перегиба интегральных кривых.* В точках плоскости xOy, координаты которых удовлетворяют условию $y<x^2$, интегральные кривые вогнуты вниз $(y''<0)$, а в точках, где $y > x^2$, они вогнуты вверх $(y'' > 0)$ (см. рис. 3).

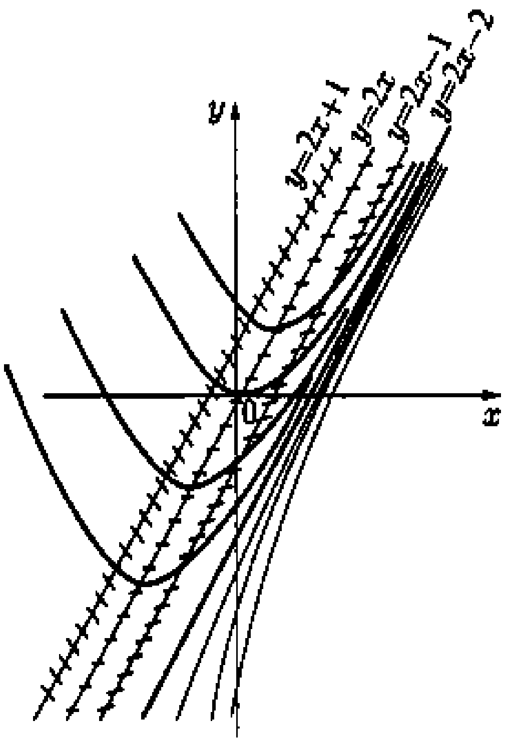


Рисунок 2 - Интегральные кривые уравнения $y' = 2x - y$

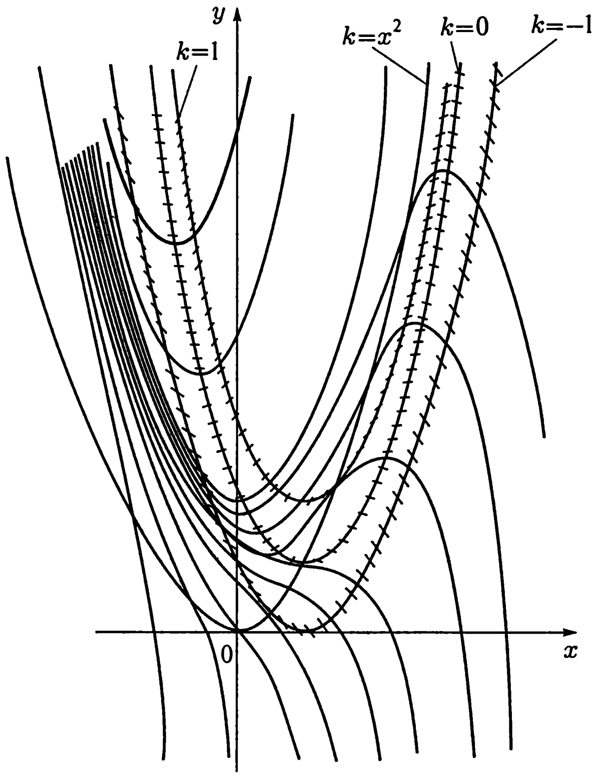


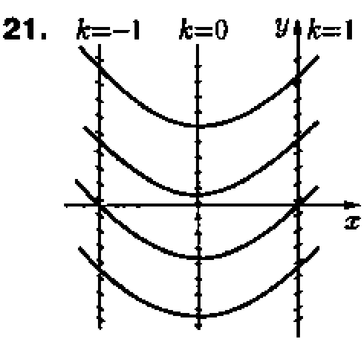
Рисунок. 3 - Интегральные кривые уравнения $y' = y - x^2 + 2x - 2$

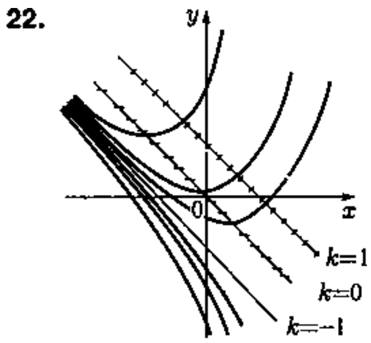
Задачи для самостоятельного решения

Методом изоклин построить интегральные кривые следующих дифференциальных уравнений (Краснов):

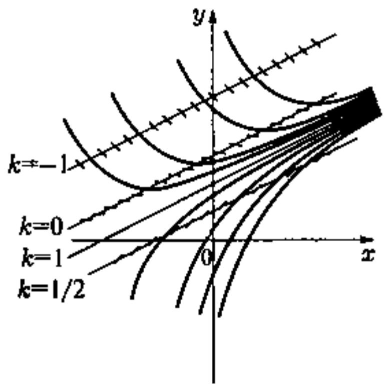
21. $y' = x + 1$ 22. $y' = x + y$ 24. $y' = \frac{1}{2}(x - 2y + 3)$

25. $y' = (y-1)^2$ 26. $y' = (y-1)x$ 27. $y' = x^2 - y^2$

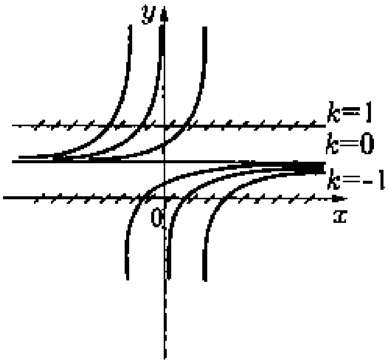




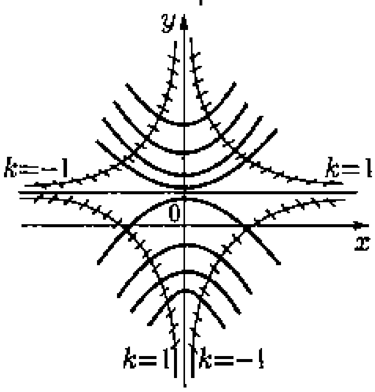
24.



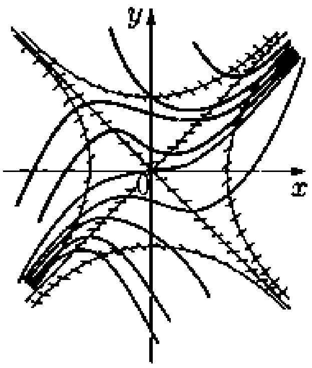
25.



26.



27.



1.2. Получение ДУ по общему решению – семейству кривых

Рассмотрим теперь задачу обратную интегрированию ДУ.

Пусть дано семейство функции, зависящее от одного параметра *C*:

$$y = \varphi(x, C), \tag{5}$$

причем через каждую точку плоскости (или некоторой области на плоскости) проходит только одна кривая из этого семейства.

Для какого дифференциального уравнения это семейство функций является общим интегралом?

Из соотношения (5), *дифференцируя по x,* найдем

$$y' = \varphi_x'(x, C). \tag{6}$$

Так как через каждую точку плоскости проходит только одна кривая семейства, то для каждой пары чисел x и y определяется единственное значение C из уравнения (5). Подставляя это значение C в соотношение (6), найдем $\frac{dy}{dx}$ как функцию от x и y. Это и дает нам дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет в с я к а я функция из семейства (5).

Следовательно, чтобы установить связь между x, y и y' т. е. чтобы написать дифференциальное уравнение, общий интеграл которого определяется формулой (5), нужно исключить C из соотношений (5) и (6).

П р и м е р 1. Найти ДУ семейства парабол $y = Cx^2$ (рис. 4).

Дифференцируя по x уравнение семейства, найдем $y' = 2Cx$. Подставляя сюда значение $C = y / x^2$ из уравнения семейства, получаем дифференциальное уравнение данного семейства: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2y}{x}$.

Это дифференциальное уравнение имеет смысл при $x \neq 0$, т. е. в любой области, не содержащей точек на оси *Oy*.

Пример 2.-Найти ДУ семейства гипербол $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{1}=1$.

Дифференцируя это уравнение по *x*, получаем

$$\frac{2x}{a^2}-2yy'=0, \text{ или } \frac{x}{a^2}=yy'.$$

Умножим обе части на *x*, тогда $\dfrac{x^2}{a^2}=xyy'$.

Подставляя в уравнение семейства найдем $xyy' - y^2 = 1$.

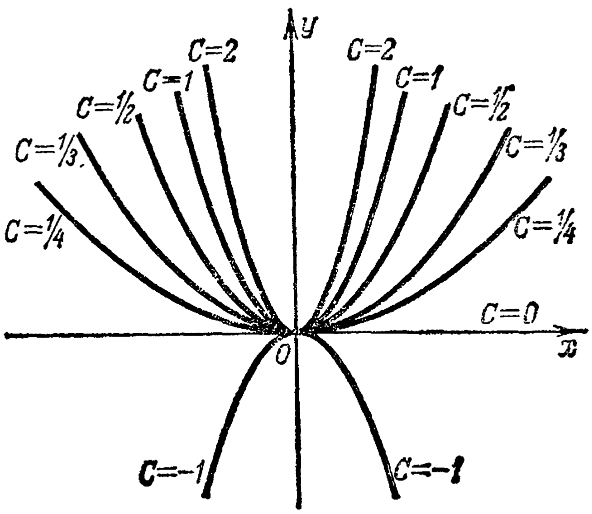


Рисунок 4 - Семейство парабол $y=Cx^2$

Пример 3. Составить дифференциальное уравнение семейства прямых, отстоящих от начала координат на расстояние, равное единице.

Будем исходить из нормального уравнения прямой

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - 1 = 0, \text{ где } a \text{ – параметр.} \tag{7}$$

Дифференцируя это выражение по *x*, получим $\cos\alpha + y'\sin\alpha = 0$, откуда $y'=-ctg\alpha$, следовательно

$$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+ctg^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}}, \quad \cos\alpha = ctg\alpha\cdot\sin\alpha=-\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}.$$

Подставив $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ в (7), получим

$$\frac{-xy'}{\sqrt{1+(y')^2}}+\frac{y}{\sqrt{1+(y')^2}}-1=0, \text{ или } y=xy'+\sqrt{1+(y')^2}$$

В общем случае, чтобы построить дифференциальное уравнение, которому удовлетворяют кривые семейства

$$\varphi(x,y,C_{1,...,}C_n)=0, \tag{8}$$

надо продифференцировать равенство (8) *n* раз, считая *y* функцией от *x*, а затем из полученных уравнений и уравнения (8) исключить произвольные постоянные $C_1,...,C_n$.

Пример 4. Составить дифференциальное уравнение семейства кривых

$$C_1x+(y-C_2)^2=0. \tag{9}$$

Так как уравнение семейства содержит два параметра, дифференцируем его два раза, считая $y = y(x):$

$$C_1+2(y-C_2)y'=0, \tag{10}$$

$$2y'^2+2(y-C_2)y''=0. \tag{11}$$

Исключаем C_1. Из уравнения (10) имеем $C_1=-2(y-C_2)y'$; подставляя это в (9), получим

$$-2xy'(y-C_2)+(y-C_2)^2=0. \tag{12}$$

Исключаем C_2. Из уравнения (11) имеем $y-C_2=-y'^2/y''$; подставляя это в (12), получим после упрощений дифференциальное уравнение

$$y+\mathbf{2}xy''=\mathbf{0}.$$

1.3. Задачи для самостоятельного решения

В задачах 17—29 составить дифференциальные уравнения данных семейств линий. (Филлипов)

17. $y=e^{Cx}$.
18. $y=(x-C)^3$.
19. $y=Cx^3$.
20. $y=sin(x+C)$.
21. $x^2+Cy^2=2y$.
22. $y^2+Cx=x^3$.
23. $y=C(x-C)^2$.
24. $Cy=sin\,Cx$.
25. $y=ax^2+be^x$.
26. $(x-a)^2+by^2=1$.
27. $ln\,y=ax+by$.
28. $y=ax^3+bx^2+cx$.
29. $x=ay^2+by+c$.

30. Составить дифференциальное уравнение окружностей радиуса 1, центры которых лежат на прямой $y = 2x$.

31.Составить дифференциальное уравнение парабол с осью, параллельной Oy, и касающихся одновременно прямых $y=0$ и $y=x$.

32. Составить дифференциальное уравнение окружностей, касающихся одновременно прямых $y=0$ и $x=0$ и расположенных в первой и третьей четвертях.

33. Составить дифференциальное уравнение всех парабол с осью, параллельной Oy, и проходящих через начало координат.

34. Составить дифференциальное уравнение всех окружностей, касающихся оси

абсцисс.

№	Ответы	№	Ответы
17.	$y = e^{xy'/y}$	26.	$(yy'' + y'^2)^2 = -y^3 y''$
18.	$y' = 3y^{2/3}$	27.	$y''y^2(\ln y - 1) = y'^2(xy' - y)$
19.	$xy' = 3y$	28.	$x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = 0$
20.	$y^2 + y'^2 = 1$	29.	$y'''y^2 = 3y''^2$
21.	$x^2 y' - xy = yy'$	30.	$(y - 2x)^2(y'^2 + 1) = (2y' + 1)^2$
22.	$2xyy' - y^2 = 2x^3$	31.	$xy'^2 = y(2y' - 1)$
23.	$y'^3 = 4y(xy' - 2y)$	32.	$(xy' - y)^2 = 2xy(y'^2 + 1)$
24.	$y' = \cos\dfrac{x\sqrt{1 - y'^2}}{y}$	33.	$x^2 y'' - 2y = 0$
25.	$x(x-2)y'' - (x^2 - 2)y' +$ $+2(x-1)y = 0$	34.	$(y''y + y'^2 + 1)^2 = (y'^2 + 1)^3$

2. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. Однородные уравнения

2.1. *Уравнения с разделяющимися переменными*

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x)\, f_2(y), \tag{13}$$

где правая часть есть произведение двух функций, одна из которых зависит только от x, а другая - только от y. Преобразуем уравнение следующим образом, полагая, что $f_2(y) \neq 0$:

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)\,dx, \tag{14}$$

Считая *y* известной функцией от *x*, равенство (14) можно рассматривать как равенство двух дифференциалов, а неопределенные интегралы от них будут отличаться постоянным слагаемым. Интегрируя левую часть по *y*, а правую по *x*, найдем

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)\,dx + C. \tag{15}$$

Выражение (15) называется общим интегралом уравнения (13).

Дифференциальное уравнение типа (14)

$$M(x)\,dx = N(y)\,dy \tag{16}$$

Называется уравнением с ***разделенными переменными***.

Пример. Проинтегрировать дифференциальное уравнение $xdx + ydy = 0$.

Решение. $\int xdx + \int ydy = C_1$; $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C_1$. Вводя обозначение $2C_1 = R^2$, получим известное уравнение семейства концентрических окружностей $x^2 + y^2 = R^2$ с центром в начале координат.

Очевидно, простейшим дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными является следующее

$$y' = f(x) \quad \text{или} \quad dy = f(x)dx.$$

Его общим решением является неопределенный интеграл

$$y = \int f(x)dx + C.$$

К уравнению с разделяющимися переменными можно привести и уравнение вида

$$y' = f(ax + by + c), \tag{17}$$

где *a*, *b*, *c* – постоянные. Для этого вводится новая функция $z = ax + by + c$. Поскольку $\frac{dz}{dx} = \frac{d(ax+by+c)}{dx} = a + by'$, $y' = \frac{z' - a}{b}$, и для z получаем уравнение с разделяющимися переменными: $z' = a + bf(z)$.

Пример. Найти частное решение уравнения $y' = \sqrt{2x + y}$, удовлетворяющее условию $y(4) = 1$.

Решение. Пусть $z = 2x + y$, $z' = 2 + y'$, $y' = z' - 2$.

Решим уравнение для *z*:

$z' - 2 = \sqrt{z}$, $\frac{dz}{\sqrt{z} + 2} = dx$, $\int \frac{dz}{\sqrt{z} + 2} = \int dx$, $t = \sqrt{z}$, $\int \frac{2tdt}{t+2} = x + C$,

$\int \left(2 - \frac{4}{t+2}\right)dt = x + C$, $2t - 4ln|t+2| = x + C$, $2\sqrt{2x+y} - ln(\sqrt{2x+y} + 2)^4 = x + C$. При $x = 4$, $y = 1$ получаем: $6 - 4 \ln 5 = 4 + C$, откуда $C = 2 - 4 \ln 5$. Следовательно, частное решение имеет вид: $2\sqrt{2x+y} - ln(\sqrt{2x+y} + 2)^4 = x + 2 - 4ln5$.

2.2. Однородные уравнения

Уравнение, которое можно записать в форме

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right), \tag{18}$$

называется *однородным дифференциальным уравнением*. Оно тоже может быть сведено к уравнению с разделяющимися переменными для функции $t = \frac{y}{x}$. При этом $y = tx$, $y' = t'x + t$, и уравнение для t примет вид: $t'x + t = f(t)$, $\frac{dt}{f(t) - t} = \frac{dx}{x}$ – уравнение с разделяющимися переменными.

Пример. Найти общий интеграл уравнения $xy' = y + x\sqrt{\frac{y}{x}}$.

Разделим обе части равенства на *x*: $y' = \frac{y}{x} + \sqrt{\frac{y}{x}}$ и сделаем замену: $t = \frac{y}{x}$. Тогда

$t'x+t=t+\sqrt{t}$, $\int \frac{dt}{\sqrt{t}}=\int \frac{dx}{x}$, $2\sqrt{t}=ln|x|+C$, $2\sqrt{\frac{y}{x}}=ln|x|+C-$ общий интеграл уравнения.

К однородному уравнению, также можно привести уравнение вида

$$y' = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right) \tag{19}$$

при условии $\frac{a}{a_1}\neq\frac{b}{b_1}$. При этом производится параллельный перенос в плоскости (x, y) такой, чтобы начало координат совместилось с точкой (x_0; y_0) пересечения прямых $ax + by + c = 0$ и $a_1x + b_1y + c_1 = 0$. Тогда в новых координатах $\tilde{x}=x-x_0$, $\tilde{y}=y-y_0$ уравнение будет выглядеть так: $\frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}}=f\left(\frac{a\tilde{x}+b\tilde{y}}{a_1\tilde{x}+b_1\tilde{y}}\right)$ - однородное уравнение.

В случае если в исходном уравнении (19) определитель $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}=0$, то используют подстановку $ax+by=t$. После чего уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными.

Пример. Найти общее решение уравнения $y'=\frac{2x+y-4}{y-2}$.

Решение.

Решим систему уравнений $\begin{cases} 2x+y-4=0 \\ y-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0=1 \\ y_0=2 \end{cases}$. Тогда $\begin{cases} \tilde{x}=x-1 \\ \tilde{y}=y-2 \end{cases}$, и в новых переменных (с учетом того, что $\frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}}=\frac{dy}{dx}$) получаем уравнение $\frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}}=\frac{2\tilde{x}+\tilde{y}}{\tilde{y}}$. Замена $t=\frac{\tilde{y}}{\tilde{x}}$ приводит к уравнению

$$t'\tilde{x}+t=\frac{2+t}{t},\quad t'\tilde{x}=\frac{2+t}{t}-t=-\frac{t^2-t-2}{t},\quad \int\frac{t}{t^2-t-2}dt=-\int\frac{d\tilde{x}}{\tilde{x}},$$

$$\frac{1}{3}\int\left(\frac{2}{t-2}+\frac{1}{t+1}\right)dt=-\int\frac{dx}{\tilde{x}},\quad \frac{2}{3}ln|t-2|+\frac{1}{3}ln|t+1|=-ln|\tilde{x}|+ln|C|.$$

После упрощения и обратной замены получаем общее решение в виде:

$$\sqrt[3]{\frac{(y-2x)^2}{x(x+y-1)}}=\frac{C}{x-1}.$$

2.3. Задания для решения в аудитории

1. Найти общий интеграл:

а). $xy'-y=0$

б). $x^2y'+y=0$

в). $xyy' = 1 - x^2$

г). $x + xy + y'(y + xy) = 0$

2. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальному условию:

а). $(xy^2 + x)dx + (x^2y - y)dy = 0, y(0) = 1$

3. Найти общее решение дифференциального уравнения:

а). $xy' + y = 2y(\ln y - \ln x)$

б). $y' = 2 + \dfrac{y}{x}$

в). $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'$

г). $y' = \frac{y}{x} + sin\frac{y}{x}$

4. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальному условию:

а). $xy' = y\,ln\frac{y}{x}$, $y(1) = 1$

б). $(\sqrt{xy} - x)dy + ydx = 0$, $y(1) = 1$

3. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнение Бернулли

3.1. Линейные уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение называется линейным относительно неизвестной функции и ее производной, если оно может быть записано в виде:

$$y' + P(x)y = Q(x), \tag{20}$$

при этом, ***если правая часть Q(x) равна нулю***, то такое уравнение называется ***линейным однородным*** дифференциальным уравнением, если правая часть *Q(x)* ***не равна нулю, то - линейным неоднородным*** дифференциальным уравнением.

P(x) и *Q(x)*- функции непрерывные на некотором промежутке a < x < b.

Линейные однородные дифференциальные уравнения.

$$y' + P(x)y = 0. \tag{21}$$

Для этого типа дифференциальных уравнений разделение переменных не представляет сложностей (с разделяющимися переменными).

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx; \qquad ln|y| = -\int P(x)dx + ln|C|; \qquad ln\left|\frac{y}{C}\right| = -\int P(x)dx;$$

Общее решение:

$$y = Ce^{-\int P(x)dx}. \tag{22}$$

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения.

Для интегрирования линейных неоднородных уравнений применяются в основном два метода: метод Бернулли и метод Лагранжа.

Метод Бернулли

(Якоб Бернулли (1654-1705) – швейцарский математик.)

Суть метода заключается в том, что искомая функция представляется в виде произведения двух функций

$$y(x) = u(x) \cdot v(x) \quad \text{или сокращенно } y = uv. \tag{23}$$

При этом $y' = u \cdot \dfrac{dv}{dx} + v \cdot \dfrac{du}{dx}$ - дифференцирование по частям.

Подставляя в исходное уравнение, получаем:

$$u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + P(x)uv = Q(x),$$

$$u\frac{dv}{dx} + v\left(\frac{du}{dx} + P(x)u\right) = Q(x). \tag{24}$$

Поскольку первоначальная функция представлена в виде произведения двух, то выбор одной из функций-сомножителей в известной степени произвольный.

Выберем функцию *u* такой, чтобы

$$\frac{du}{dx} + P(x)u = 0. \tag{25}$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Имеем

$$\frac{du}{u}=-P(x)dx; \qquad \int\frac{du}{u}=-\int P(x)dx; \qquad ln|u|=-\int P(x)dx+lnC_1;$$

$$u=C_1\cdot e^{-\int P(x)dx}. \tag{26}$$

Поскольку скобка равна нулю, из выражения (24) получим

$$u\frac{dv}{dx}=Q(x); \quad dv=\frac{Q(x)}{u}dx; \quad v=\int\frac{Q(x)}{u}dx+C_2. \tag{27}$$

Подставляя полученные значения, получаем:

$$y=uv=C_1e^{-\int P(x)dx}\cdot\frac{1}{C_1}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C_2\right),$$

или окончательно:

$$y=e^{-\int P(x)dx}\cdot\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C_2\right), \tag{28}$$

C_2 - произвольный коэффициент.

Это соотношение может считаться решением неоднородного линейного дифференциального уравнения в общем виде по способу Бернулли.

Метод Лагранжа

(Лагранж Жозеф Луи (1736-1813) - французский математик, президент Берлинской АН, почетный член Петербуржской АН (1776)).

Метод Лагранжа решения неоднородных линейных дифференциальных уравнений еще называют методом ***вариации произвольной постоянной***.

Вернемся к поставленной задаче:

$$y'+P(x)y=Q(x)$$

Первый шаг – решение соответствующего однородного уравнения

$$y'+P(x)y=0; \qquad y=C_1e^{-\int P(x)dx}.$$

Второй шаг – полагаем $C_1=C_1(x)$ некоторой функцией от *x*.

Тогда по правилам дифференцирования получаем:

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dC_1(x)}{dx}e^{-\int P(x)dx}-C_1(x)e^{-\int P(x)dx}\cdot P(x).$$

Подставляя полученное соотношение в исходное уравнение получим

$$\frac{dC_1(x)}{dx}e^{-\int P(x)dx}-C_1(x)P(x)e^{-\int P(x)dx}+P(x)C_1(x)e^{-\int P(x)dx}=Q(x)$$

$$\frac{dC_1(x)}{dx}e^{-\int P(x)dx}=Q(x). \tag{29}$$

Из этого уравнения определим переменную функцию $C_1(x)$:

$$dC_1(x)=Q(x)e^{\int P(x)dx}dx, \qquad C_1=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C$$

Подставляя это значение в исходное уравнение, получаем:

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right). \tag{30}$$

Таким образом, мы получили результат, полностью совпадающий с результатом расчета по методу Бернулли.

Пример. Решить уравнение $\frac{dy}{dx}-\frac{2}{x+1}y=(x+1)^3$

метод Бернулли

Полагаем $y = uv$, тогда $\frac{dy}{dx}=u\frac{dv}{dx}+\frac{du}{dx}v$

Подставляя выражение $\frac{dy}{dx}$ исходное уравнение, будем иметь

$$u\frac{dv}{dx}+\frac{du}{dx}v-\frac{2}{x+1}uv=(x+1)^3, \qquad u\left(\frac{dv}{dx}-\frac{2}{x+1}v\right)+v\frac{du}{dx}=(x+1)^3. \qquad (31)$$

Для определения v получим уравнение $\frac{dv}{dx}-\frac{2}{x+1}v=0$, *т. е.* $\frac{dv}{v}=\frac{2dx}{x+1}$, откуда $ln|v|=2ln|x+1|$, или $v=(x+1)^2$. Подставляя выражение функции v в уравнение (31), получаем для определения *u* уравнение $(x+1)^2\frac{du}{dx}=(x+1)^3$, или $\frac{du}{dx}=x+1$ откуда $u=\frac{(x+1)^2}{2}+C$

.

Следовательно, общий интеграл заданного уравнения будет иметь вид

$$y = uv=\frac{(x+1)^4}{2}+C(x+1)^2.$$

метод Лагранжа

для однородного уравнения имеем:

$$\frac{dy}{y}=\frac{2dx}{x+1}; \qquad ln\,y=2ln|x+1|+lnC_1; \qquad y=C_1(x+1)^2.$$

Варьируя переменную C1 получим

$$C_1'(x+1)^2=(x+1)^3; \qquad C_1=\int(x+1)dx=\frac{x^2}{2}+x+C$$

, откуда

$$y=\left(\frac{x^2+2x+1}{2}-\frac{1}{2}+C\right)(x+1)^2=\frac{(x+1)^4}{2}+\left(C-\frac{1}{2}\right)(x+1)^2,$$

что совпадает с решением по методу Бернулли.

Полученное семейство является *общим* решением. Каково бы ни было начальное условие $(x_0;y_0)$, где $x_0\neq -1$, всегда можно так подобрать C, чтобы соответствующее частное решение удовлетворяло заданному начальному условию. Например, частное решение, удовлетворяющее условию $y_0=3$ при $x_0=0$, найдется следующим образом: $3=\frac{(0+1)^4}{2}+C(0+1)^2$, $C=5/2$. Следовательно, искомое частное решение таково: $y=\frac{(x+1)^4}{2}+\frac{5}{2}(x+1)^2$. Однако, если начальное условие ($x_0; y_0$) выбрать так, что $x_0 = -1$, то мы не найдем частного решения, удовлетворяющего этому условию. Это объясняется тем, что при $x_0 = -1$ функция $P(x) = -\dfrac{2}{x+1}$ разрывна и, следовательно, условия теоремы существования решения не соблюдены.

З а м е ч а н и е . В приложениях часто встречаются ***линейные уравнения с постоянными коэффициентами***

$$\frac{dy}{dx} + ay = b \tag{32}$$

где a и b—постоянные.

Его можно решить как линейное или путём разделения переменных:

$$dy = (-ay+b)\,dx, \qquad \frac{dy}{-ay+b} = dx, \qquad -\frac{1}{a} ln\left|-ay+b\right| = x + C_1,$$

$$ln\left|-ay+b\right| = -(ax + aC_1)$$

$$-ay + b = e^{-(ax+aC_1)}, \qquad y = -\frac{1}{a} e^{-(ax+aC_1)} + \frac{b}{a},$$

или окончательно

$$y = Ce^{-ax} + \frac{b}{a}, \quad \text{где} \quad C = -\frac{1}{a} e^{-aC_1}. \tag{33}$$

Это и есть общее решение уравнения (32).

3.2. Уравнение Бернулли

Уравнением Бернулли называется уравнение вида

$$y' + Py = Q \cdot y^n, \tag{34}$$

где P и Q – функции от x или постоянные числа, а n – постоянное число, не равное 1.

К этому уравнению приводит задача о движении тела, если сопротивление среды F зависит от скорости так: $F = \lambda_1 v + \lambda_2 v^n$. Уравнение движения будет тогда $m\dfrac{dv}{dt} = -\lambda_1 v - \lambda_2 v^n$.

Для решения разделим исходное уравнение (34) на y^n

$$\frac{y'}{y^n} + P\frac{1}{y^{n-1}} = Q. \tag{35}$$

Используем подстановку $z = y^{-n+1} = \dfrac{1}{y^{n-1}}$, тогда

$$z' = -(n-1)\,y^{-n} \cdot y' = -\frac{(n-1)\,y'}{y^n}; \qquad \frac{y'}{y^n} = -\frac{z'}{n-1}.$$

В этом случае уравнение Бернулли (35) приводится к линейному

$$-\frac{z'}{n-1} + Pz = Q; \qquad z' + (1-n)P \cdot z = (1-n)Q.$$

Пример. Решить уравнение $xy' + y = xy^2 \ln x$.

Разделим уравнение на xy^2: $\frac{y'}{y^2}+\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}=ln\,x.$

Полагаем $z=\frac{1}{y};\quad z'=-\frac{y'}{y^2}.\ -z'+\frac{1}{x}z=ln\,x;\qquad z'-\frac{1}{x}z=-ln\,x.$

По методу Лагранжа имеем: $\frac{dz}{z}=\frac{dx}{x};\quad z=C_1x;\quad C_1'x=-ln\,x;$

$C_1=-\int\frac{ln\,x}{x}dx=-\frac{ln^2x}{2}+C$, откуда $z=\left(-\frac{ln^2x}{2}+C\right)x.$

Произведя обратную подстановку, получаем:

$$\frac{1}{y}=x\left(-\frac{ln^2x}{2}+C\right).$$

Пример. Решить уравнение $xy'-4y=x^2\sqrt{y}.$

Разделим обе части уравнения на $x\sqrt{y}.$

$$\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{dy}{dx}-\frac{4}{x}\sqrt{y}=x.$$

Полагаем $z=\sqrt{y};\quad z'=\frac{1}{2\sqrt{y}}y';\quad y'=2\sqrt{y}z';$

$$\frac{1}{\sqrt{y}}2\sqrt{y}z'-\frac{4}{x}z=x;\quad \frac{dz}{dx}-\frac{2z}{x}=\frac{x}{2};$$

Получили линейное неоднородное дифференциальное уравнение. Рассмотрим соответствующее ему линейное однородное уравнение:

$$\frac{dz}{dx}-\frac{2z}{x}=0;\quad \frac{dz}{dx}=\frac{2z}{x};\quad \frac{dz}{z}=\frac{2dx}{x};$$

$$\int\frac{dz}{z}=2\int\frac{dx}{x}+C_1;\quad ln\,z=2\,ln\,x+ln\,C;\quad z=Cx^2;$$

Полагаем C = C(x) и подставляем полученный результат в линейное неоднородное уравнение, с учетом того, что:

$$\frac{dz}{dx}=2xC(x)+x^2\frac{dC(x)}{dx};$$

$$2xC(x)+x^2\frac{dC(x)}{dx}-\frac{2x^2C(x)}{x}=\frac{x}{2};$$

$$\frac{dC(x)}{dx}=\frac{1}{2x};\qquad C(x)=\frac{1}{2}ln\,x+C_2;$$

Получаем: $z=x^2\left(C_2+\frac{1}{2}ln\,x\right);$

Применяя обратную подстановку, получаем окончательный ответ:

$$y=x^4\left(C_2+\frac{1}{2}ln\,x\right)^2;$$

Замечание. Аналогично тому, как это делалось для линейных уравнений, можно показать, что решение уравнения Бернулли можно искать в виде произведения двух функций:

$$y = u(x)v(x),$$

где $v(x)$—какая-либо функция, отличная от нуля и удовлетворяющая уравнению $v' + Pv = 0$.

3.3. Уравнения в полных дифференциалах (тотальные)

Дифференциальное уравнение первого порядка вида:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad (36)$$

называется ***уравнением в полных дифференциалах***, если левая часть этого уравнения представляет собой полный дифференциал некоторой функции $u = F(x,y)$.

Интегрирование такого уравнения сводится к нахождению функции *u*, после чего решение легко находится в виде: $du = 0; \quad u = C$.

Таким образом, для решения надо определить:

1) в каком случае левая часть уравнения представляет собой полный дифференциал функции *u*;

2) как найти эту функцию.

Если дифференциальная форма $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ является полным дифференциалом некоторой функции *u*, то можно записать:

$$du = M(x,y)dx + N(x,y)dy = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy.$$

$$\text{Т.е. } \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = M(x,y) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = N(x,y) \end{cases}.$$

Найдем смешанные производные второго порядка, продифференцировав первое уравнение по *y*, а второе – по *x*:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x} \end{cases}$$

Приравнивая левые части уравнений, получаем необходимое и достаточное условие того, что левая часть дифференциального уравнения является полным дифференциалом. Это условие также называется условием тотальности.

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

Теперь рассмотрим вопрос о нахождении собственно функции *u*.

Проинтегрируем равенство $\dfrac{\partial u}{\partial x} = M(x,y)$:

$$u = \int M(x,y)dx + C(y).$$

Вследствие интегрирования получаем не постоянную величину С, а некоторую функцию С(у), т.к. при интегрировании переменная *y* полагается постоянным параметром.

Определим функцию С(у).

Продифференцируем полученное равенство по y.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx + C'(y).$$

Откуда получаем: $C'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx.$

Для нахождения функции С(у) необходимо проинтегрировать приведенное выше равенство. Однако, перед интегрированием надо доказать, что функция С(у) не зависит от x. Это условие будет выполнено, если производная этой функции по x равна нулю.

$$\left[C'(y)\right]_x' = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int M(x,y)dx\right) =$$

$$= \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 0.$$

Теперь определяем функцию С(у):

$$C(y) = \int\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right]dy + C$$

Подставляя этот результат в выражение для функции u, получаем:

$$u = \int M(x,y)dx + \int\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}M(x,y)dx\right]dy + C.$$

Тогда общий интеграл исходного дифференциального уравнения будет иметь вид:

$$\int M(x,y)dx + \int\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}M(x,y)dx\right]dy = C.$$

Следует отметить, что при решении уравнений в полных дифференциалах не обязательно использовать полученную формулу. Решение может получиться более компактным, если просто следовать методу, которым формула была получена.

Пример. Решить уравнение $(3x^2 + 10xy)dx + (5x^2 - 1)dy = 0$

Проверим условие тотальности: $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial(3x^2 + 10xy)}{\partial y} = 10x;$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial(5x^2 - 1)}{\partial x} = 10x.$$

Условие тотальности выполняется, следовательно, исходное дифференциальное уравнение является уравнением в полных дифференциалах.

Определим функцию u.

$$u = \int M(x,y)dx + C(y) = \int(3x^2 + 10xy)dx + C(y) = x^3 + 5x^2y + C(y);$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 5x^2 + C'(y) = N(x,y) = 5x^2 - 1;$$

$$C'(y) = -1; \quad C(y) = \int(-1)dy = -y + C_1;$$

Итого, $u = x^3 + 5x^2y - y + C_1.$

Находим общий интеграл исходного дифференциального уравнения:

$$u = x^3 + 5x^2y - y + C_1 = C_2;.$$

$$x^3 + 5x^2 y - y = C.$$

3.4. Задания для решения в аудитории:

1. Решить уравнения:

а). $y' - \frac{3y}{x} = x$

б). $x^2 y' + xy + 1 = 0$

в). $y' \cos x - y \sin x = \sin 2x$

г). $y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 2x$

2. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальному условию:

а). $y'-\dfrac{2x}{1+x^2}y=3$, если $y(1)=2$

3. Найти общее решение дифференциального уравнения:

а). $y'+y=-xy^2$

б). $y'+2y=y^2e^x$

в). $y'+y=x\sqrt{y}$

3.5. *Изогональные и ортогональные траектории (Пискунов)*

Пусть имеем однопараметрическое семейство кривых

$$\Phi(x,y,C)=0. \qquad (37)$$

Линии, пересекающие все кривые данного семейства (37) под постоянным углом, называются *изогональными траекториями.* Если этот угол прямой, то траектории называются *ортогональными траекториями*.

1) Найдем уравнение ортогональных траекторий для семейства кривых (37). Для этого вначале составим дифференциальное уравнение семейства кривых, исключая из него постоянную C. В общем виде такое дифференциальное уравнение примет вид:

$$F(x,y,y')=0. \tag{38}$$

2) Угловые коэффициенты ортогональных траекторий, как известно, связаны соотношением $k_1k_2=-1$. Откуда дифференциальное уравнение семейства ортогональных траекторий примет вид:

$$\text{вместо } y' \to -\frac{1}{y'}; \qquad F\left(x,y,-\frac{1}{y'}\right)=0. \tag{39}$$

3) Наконец, интегрируя его, получим искомое семейство ортогональных траекторий $\Phi_1(x,y,C)=0$.

Пример 5. (Краснов). Найти ортогональные траектории семейства линий $y = kx$.

1. Получим дифференциальное уравнение данного семейства линий. Для этого дифференцируем по *x* обе части уравнения $y = kx$. Имеем $y' = k$. Подставив выражение для параметра *k* в исходное уравнение получим дифференциальное уравнение семейства $xy' = y$.

2. Заменяя в нем y' на $-\frac{1}{y'}$, получаем дифференциальное уравнение ортогональных траекторий $-\frac{x}{y}=y$, или $yy'+x=0$.

3. Интегрируя полученное ДУ с разделяющимися переменными, найдем уравнение ортогональных траекторий $x^2+y^2=C \quad (C\ge 0)$. Ортогональными траекториями являются окружности с центром в начале координат (рис. 5).

Пример 6. Найти ортогональные траектории семейства парабол $y=ax^2$

1. Составляем дифференциальное уравнение семейства парабол. Для этого дифференцируем обе части данного уравнения по *x*: $y'=2ax$. Исключая параметр *a*, найдём $\frac{y'}{y}=\frac{2}{x}$, или $y'=\frac{2y}{x}$ - дифференциальное уравнение данного семейства. 2. Заменяя в уравнении y' на $-\frac{1}{y'}$, получим дифференциальное уравнение ортогональных траекторий $-\frac{1}{y'}=\frac{2y}{x}$, или $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{2y}$.

3. Интегрируя, найдем $y^2=-\frac{x^2}{2}+C$ или $\frac{x}{2}+y^2 = C$, $C > 0$. Ортогональным семейством является семейство эллипсов (рис. 7).

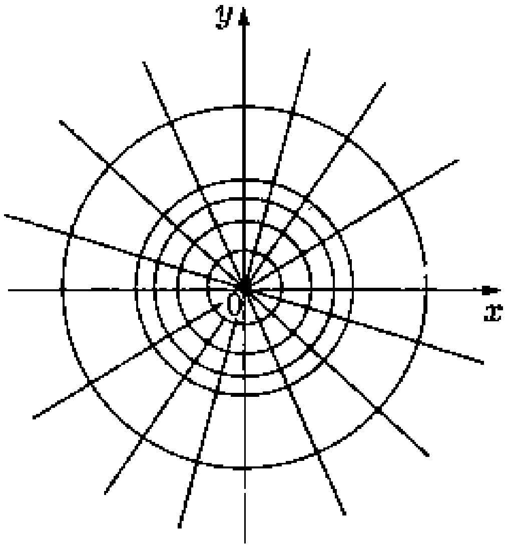


Рисунок 5

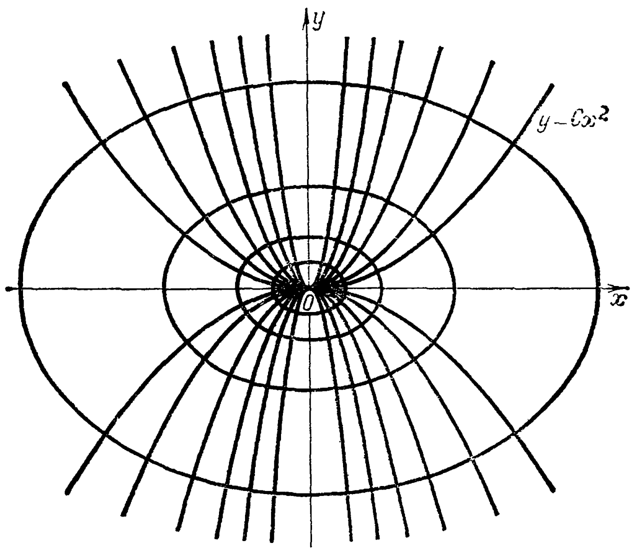


Рисунок 7

3.6. Задачи для самостоятельного решения

Найти ортогональные траектории для данных семейств кривых:

249. $y^2+2ax=0, a>0$
250. $y=ax^n$, a-параметр
251. $y=ae^{\delta x}, \delta=const$
252. $\cos y=ae^{-x}$
253. $x^2+\frac{1}{2}y^2=a^2$
254. $x^2-y^2=a^2$
255. $x^k+y^k=a^k$
256. $x^2+y^2=2ay$
257. $x^2-\frac{1}{3}y^2=a^2$
258. $\rho=a(1+\cos\varphi)$
259. $y^2=4(x-a)$.

№	Ответы		
249.	$2x^2+y^2=C$	256.	$x^2+y^2=Cx$
250.	$x^2+ny^2=C$	257.	$xy^3=C$
251.	$2x+\delta y^2=C$	258.	$\rho=C(1-\cos\varphi)$

4. Задачи на составление дифференциальных уравнений

4.1. Примеры задач

Составление дифференциального уравнения изучаемого процесса является одним из важнейших этапов исследования.

Стоимость оборудования

Пример 1. Из эксперимента известно, что стоимость оборудования уменьшается во времени пропорционально текущей его стоимости. Найти период, в течение которого стоимость оборудования уменьшится вдвое.

Р е ш е н и е. Пусть $x(t)$ – стоимость оборудования в момент времени *t*, $x(0)=x_0$. Указанный экспериментальный факт означает, что $\frac{dx}{dt}=-kx,$ $k>0$. Отсюда $\frac{dx}{x}=-kdt,$ $ln\,x=-kt+ln\,c,\ x=ce^{-kt}.$

Так как $x(0)=x_0=c$, то закон изменения стоимости оборудования во времени имеет вид $x(t)=x_0e^{-kt}.$

Время *T,* через которое стоимость оборудования уменьшится вдвое, определяется из уравнения $\frac{1}{2}x_0=x_0e^{-kT},$ т. е. $T=\frac{ln\,2}{k}.$ Это время не зависит от начальной стоимости.

Замедление лодки

Пример 2. Лодка замедляет свое движение под действием сопротивления воды, которое пропорционально скорости лодки. Начальная скорость лодки равна 2 м/с, а ее скорость через 4 с равна 1 м/с. Через сколько секунд скорость лодки будет равна 0,25 м/с? Какой путь может пройти лодка до остановки?

Р е ш е н и е. Пусть $v=v(t)$ – скорость лодки в момент *t*. Тогда $v(0)=2$. Согласно второму закону Ньютона, $m\frac{dv}{dt}=F(t),$ где $F(t)$ – сила, действующая на лодку; *m* – масса лодки. По условию, $F(t)=-kv(t),$ где $k>0$ – коэффициент пропорциональности, а знак минус означает, что сила направлена против движения (на уменьшение скорости). Поэтому дифференциальное уравнение движения лодки есть $m\frac{dv}{dt}=-kv.$

Его решения $\frac{dv}{v}=-\frac{k}{m}dt$ $\quad ln\,v=-\frac{k}{m}t+ln\,C$ $\quad v=Ce^{-\frac{k}{m}t}.$

Согласно условию, $v(0)=2$, поэтому $C=2$ и $v(t)=2e^{-\frac{k}{m}t}.$

Поскольку $v(4)=1,$ то можно определить величину $\frac{k}{m}$:

$$1=2e^{-\frac{k}{m}4};\qquad ln\frac{1}{2}=-ln\,2=-\frac{k}{m}4\qquad \frac{k}{m}=\frac{ln\,2}{4}.$$

Скорость лодки $v(t)=2e^{-\frac{k}{m}t}=2\left(e^{ln\,2}\right)^{-\frac{t}{4}}=2\cdot 2^{-\frac{t}{4}}=2^{1-\frac{t}{4}}.$

Время *T,* через которое скорость лодки будет равна *0,25 м/с*, находим из уравнения $0{,}25=2^{1-\frac{T}{4}}$, откуда $2^{-2}=2^{1-\frac{T}{4}},\ -2=1-\frac{T}{4},\ \ T=12\ c.$

Длину пройденного пути вычислим по формуле

$$s(t)=\int_0^t v(x)dx=\int_0^t 2^{1-\frac{x}{4}}dx=2\int_0^t 2^{-\frac{x}{4}}dx=$$

$$=-4\cdot 2\int_0^t 2^{-\frac{x}{4}}d\left(-\frac{x}{4}\right)=\frac{-8}{ln\,2}2^{-\frac{x}{4}}\Big|_0^t=\frac{8}{ln\,2}\left(1-2^{-\frac{t}{4}}\right).$$

Отсюда видно, что лодка может пройти путь, не больший $\frac{8}{ln\,2}\approx 11{,}5$ *м*.

В сосуд поступает раствор

Пример 3. В сосуд, содержащий 20л воды, непрерывно со скоростью 5л в минуту поступает раствор, в каждом литре которого содержится 0,2кг соли. В сосуде раствор перемешивается, и смесь вытекает из сосуда с той же скоростью. Сколько соли будет в сосуде через *4* мин?

Решение. Обозначим через $m(t)$ количество соли в сосуде через *t* мин после начала процесса. Вычислим, насколько изменится количество соли в сосуде за промежуток времени $[t;t+\Delta t]$.

За время Δt в сосуд поступит $5\cdot\Delta t$ л раствора. В этом растворе содержится $0{,}2\cdot 5\cdot\Delta t=\Delta t$ кг соли. За это же время из сосуда вытечет $5\Delta t$ л раствора. В момент *t* в сосуде было $m(t)$ кг соли, следовательно, в $5\cdot\Delta t$ л вытекающего раствора содержалось бы $\frac{m(t)}{20}\cdot 5\cdot\Delta t=0{,}25\cdot m(t)\cdot\Delta t$ *кг* соли, если бы за время Δt количество соли в сосуде не изменялось. Так как за это время данное количество соли изменится на некоторую величину α (отметим, что $\alpha\to 0$ при $\Delta t\to 0$), то из сосуда за время Δt вытечет $0{,}25\left(m(t)+\beta\right)\Delta t$ кг соли, где $0<\beta<\alpha$.

Таким образом, в растворе, втекающем в сосуд за промежуток $[t;t+\Delta t]$, содержится Δt кг соли, а в вытекающем за это же время – $0{,}25\left(m(t)+\beta\right)\Delta t$ кг соли. Приращение количества соли за это время $m(t+\Delta t)-m(t)$ равно разности найденных величин, т. е.

$$m(t+\Delta t)-m(t)=\Delta t-0{,}25\left(m(t)+\beta\right)\Delta t.$$

Разделим обе части этого равенства на Δt и перейдем к пределу при $\Delta t\to 0$. Учитывая, что $\beta\to 0$, когда $\Delta t\to 0$, имеем $m'(t)=1-0{,}25m(t)$.

Получили дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция $m(t)$. Решения этого уравнения имеют вид

$$m(t)=4+Ce^{-\frac{t}{4}}.$$

Так как в момент $t=0$ соли в сосуде не было, т. е. $m(0)=0$, то $C=-4$. Итак, количество соли в сосуде со временем изменяется по закону

$$m(t)=4\left(1-e^{-\frac{t}{4}}\right).$$

В момент $t=4$ в сосуде будет $m(4)=4\left(1-e^{-1}\right);\ 2{,}4$ *кг* соли.

Геометрические задачи

Пример 4. Кривая $y=\varphi(x)$ проходит через точку $(1;2)$. Каждая касательная к этой кривой пересекает прямую $y=1$ в точке с абсциссой, равной удвоенной абсциссе точки касания. Найти кривую $y=\varphi(x)$.

Решение. Пусть $(x;y)$ – произвольная точка на данной кривой. Уравнение касательной, проведенной к этой кривой в точке $(x;y)$, имеет вид

$$Y-y=\frac{dy}{dx}(X-x),$$

где X, Y – текущие координаты точек касательной. Из того условия, что касательная пересекает прямую $y=1$ в точке с абсциссой $2x$, получаем дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет искомая кривая:

$$1-y=\frac{dy}{dx}(2x-x), \qquad x\frac{dy}{dx}=1-y$$

Разделив переменные и проинтегрировав это уравнение, находим

$$\frac{dy}{1-y}=\frac{dx}{x}; \qquad -ln|1-y|=ln\,x-ln\,C; \quad 1-y=\frac{C}{x}; \quad y=1-\frac{C}{x}.$$

Искомая кривая проходит через точку $(1;2)$, поэтому $2=1-C$, $C=-1$, следовательно, $y=1+\frac{1}{x}$.

4.2. Задания для решения в аудитории

Задача 1. На материальную точку массы ***m.*** действует постоянная сила, сообщающая точке ускорение ***a.*** Окружающая среда оказывает движущейся точке сопротивление, пропорциональное скорости ее движения, коэффициент пропорциональности равен γ**.** Как изменяется скорость движения со временем, если в начальный момент точка находилась в покое?

Задача 2. Материальная точка движется по прямой со скоростью, обратно пропорциональной пройденному пути. В начальный момент движения точка находилась на расстоянии 5м от начала отсчета пути и имела скорость $v_0 = 20$ ***м/с***. Определить пройденный путь и скорость точки через 10 с после начала движения.

Задача 3. Кривая $y = \varphi(x)$ проходит через точку $(0;1)$ и обладает тем свойством, что в каждой ее точке тангенс угла касательной к этой кривой равен удвоенному произведению координат точки касания. Найти кривую $y = \varphi(x)$.

Задача 4. Кривая проходит через начало координат и лежит в полуплоскости $y \geq 0$**.** Каждый прямоугольник, ограниченный осями координат и перпендикулярами к ним, проведенными из точки кривой, кривая делит на две части, причем площадь части прямоугольника, находящейся под кривой, в 2 раза меньше площади части прямоугольника, находящейся над кривой. Найти уравнение кривой.

5. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка

Дифференциальные уравнения высших порядков, решение которых может быть найдено аналитически, можно разделить на несколько основных типов.

Понижение порядка дифференциального уравнения – основной метод решения уравнений высших порядков. Этот метод дает возможность сравнительно легко находить решение, однако, он применим далеко не ко всем уравнениям. Рассмотрим случаи, когда возможно понижение порядка.

5.1. Уравнения вида (с разделенными переменными)

$$y^{(n)} = f(x). \tag{40}$$

Если f(x) – функция непрерывная на некотором промежутке a < x < b, то решение может быть найдено последовательным интегрированием.

Пример. Решить уравнение $y''' = e^{2x}$ с начальными условиями $x_0 = 0;\ y_0 = 1;$

$$y_0' = -1; \quad y_0'' = 0.$$

$$y'' = \int e^{2x}dx + C_1 = \frac{1}{2}e^{2x} + C_1;$$

$$y' = \int\left(\frac{1}{2}e^{2x} + C_1\right)dx = \frac{1}{4}e^{2x} + C_1x + C_2;$$

$$y = \int\left(\frac{1}{4}e^{2x} + C_1x + C_2\right) = \frac{1}{8}e^{2x} + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3;$$

Подставим начальные условия:

$$1 = \frac{1}{8} + C_3; \quad -1 = \frac{1}{4} + C_2; \quad 0 = \frac{1}{2} + C_1;$$

$$C_1 = -\frac{1}{2}; \quad C_2 = -\frac{5}{4}; \quad C_3 = \frac{7}{8};$$

Получаем частное решение (решение задачи Коши):

$$y = \frac{1}{8}e^{2x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{7}{8}.$$

5.2. Уравнение вида (не содержит y)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, \frac{dy}{dx}\right) \quad \text{или} \quad y^{(n)} = f\left(x, y^{(n-1)}\right) \tag{41}$$

не содержит явным образом искомой функции *y*.

Обозначим производную через p, т. е. положим

$$\frac{dy}{dx} = p(x). \qquad \text{Тогда} \ \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}.$$

Подставляя эти выражения производных в уравнение (41), получим уравнение первого порядка

$$\frac{dp}{dx} = f(x, p).$$

относительно неизвестной функции $p(x)$. Проинтегрировав это уравнение, находим его общее решение

$$p = p(x, C_1),$$

а затем из соотношения $\frac{dy}{dx} = p$ получаем общий интеграл уравнения (41)

$$y = \int p(x, C_1)dx + C_2.$$

5.3. Уравнение вида (не содержит x)

Если дифференциальное уравнение не содержит явно независимую переменную x:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(y, \frac{dy}{dx}\right) \tag{42}$$

то можно понизить его порядок на единицу, считая, что

$$\frac{dy}{dx} = p(y), \tag{43}$$

но теперь мы будем считать p функцией от y (а не от x, как прежде). Тогда

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}p. \tag{44}$$

Подставляя в уравнение (42) выражения $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$, получим уравнение первого порядка относительно вспомогательной функции $p(y)$

$$p\frac{dp}{dy} = f(y, p). \tag{45}$$

Пример. Решить задачу Коши для уравнения $y'' = yy'$, если y(1)=2, y'(1)=2.

Решение.

Замена $p(y) = y',\ y'' = pp'$ приводит к уравнению $pp' = yp$, откуда:

а) $p = 0$, $y' = 0$, $y = C$, но $y'(1)=2 \neq 0$, значит, в этом случае решения нет;

б) $p' = y,\ \int dp = \int y dy,\ p = \frac{y^2}{2} + C_1,\ p(2) = 2 \Rightarrow 2 = 2 + C_1 \Rightarrow C_1 = 0 \Rightarrow p = \frac{y^2}{2}.$

Тогда $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{2},\ \int \frac{2dy}{y^2} = \int dx,\ -\frac{2}{y} = x + C_2,\ y(1) = 2 \Rightarrow -1 = 1 + C_2 \Rightarrow C_2 = -2.$

Следовательно, искомое частное решение имеет вид: $y = \frac{2}{2-x}$.

Задача о второй космической скорости

Определить наименьшую скорость, с какой нужно бросить тело вертикально вверх, чтобы оно не вернулось на Землю. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение. Обозначим массу Земли и массу брошенного тела соответственно через M и m. По закону тяготения Ньютона сила f притяжения, действующая на тело m, будет

$$f = k\frac{Mm}{r^2},$$

где r - расстояние между центром Земли и центром тяжести брошенного тела, k -

гравитационная постоянная.

Дифференциальное уравнение движения указанного тела с массой m будет

$$m\frac{d^2r}{dt^2}=-k\frac{M\cdot m}{r^2} \quad \text{или} \quad \frac{d^2r}{dt^2}=-k\frac{M}{r^2}. \tag{46}$$

Это ДУ не содержит явно переменной t. Будем решать его при следующих НУ:

$$r=R;\ \frac{dr}{dt}=v_0 \quad \text{при } t=0.$$

Здесь R—радиус Земли, v_0 - скорость бросания.

Обозначим

$$\frac{dr}{dt}=v, \qquad \frac{d^2r}{dt^2}=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dr}\frac{dr}{dt}=v\frac{dv}{dr},$$

где v—скорость движения.

Подставляя в уравнение (46), получим $v\dfrac{dv}{dr}=-k\dfrac{M}{r^2}$.

Разделяя переменные, получаем $vdv=-kM\dfrac{dr}{r^2}$.

Интегрируя это уравнение, находим

$$\frac{v^2}{2}=kM\frac{1}{r}+C_1. \tag{47}$$

Из условия, что $v=v_0$ на поверхности Земли (при $r=R$), определим C_1:

$$\frac{v_0^2}{2}=kM\frac{1}{R}+C_1 \quad или \quad C_1=-\frac{kM}{R}+\frac{v_0^2}{2}.$$

Подставим найденное значение C_1 в равенство (47):

$$\frac{v^2}{2}=kM\frac{1}{r}-\frac{kM}{R}+\frac{v_0^2}{2} \quad или \quad \frac{v^2}{2}=kM\frac{1}{r}+\left(\frac{v_0^2}{2}-\frac{kM}{R}\right). \tag{48}$$

По условию тело должно двигаться так, чтобы скорость всегда была положительной, следовательно, $v^2/2>0$. Так как величина kM/r при неограниченном возрастании r делается как угодно малой, то условие $v^2/2>0$ будет выполняться при любом r только в случае

$$\frac{v_0^2}{2}-\frac{kM}{R}\geq 0, \tag{49}$$

или $v_0\geq\sqrt{\dfrac{2kM}{R}}$.

Следовательно, наименьшая скорость будет определяться равенством

$$v_0=\sqrt{\frac{2kM}{R}}, \tag{50}$$

где $k=6{,}66\cdot 10^{-8}\dfrac{см^3}{г\cdot c^2}$, $\quad R=63\cdot 10^7\,см$.

На поверхности Земли при $r = R$ ускорение силы тяжести равно $g = 9{,}81 м/с^2$. На основании этого из равенства (46) получаем $g = k\dfrac{M}{R^2}$, или $M = \dfrac{gR^2}{k}$. Подставляя это значение M в формулу (50), получаем

$$v_0 = \sqrt{2gR} = \sqrt{2 \cdot 981 \cdot 63 \cdot 10^7} \approx 11{,}2 \cdot 10^5 см/с = 11{,}2 км/с .$$

Задания для решения в аудитории:

1. Найти решения:

а). $y''' = \dfrac{6}{x^3}$

б). $y'' = \ln x$

в). $y'' = x + \sin x$

г). $y' + xy'' = 0$

д). $x^3 y'' + x^2 y' - 1 = 0$

е). $yy'' + y'^2 = 0$

ж). $y'' x \ln x = y'$

з). $y'' \operatorname{tg} y = 2y'^2$

и). $yy'' + y' = e^x x^2$

2. Решить задачу Коши:

а). $y'' y^3 + 1 = 0$, $y(1) = -1$, $y'(1) = -1$.

б). $y'' = 2y^3,\ y(-1) = 1,\ y'(-1) = 1$

6. Линейные дифференциальные уравнения

6.1. Свойства решений линейных дифференциальных уравнения

Линейным дифференциальным уравнением n – го порядка называется любое уравнение первой степени относительно функции y и ее производных $y', y'', ..., y^{(n)}$ вида:

$$p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + ... + p_{n-1} y' + p_n y = f(x); \qquad (51)$$

где $p_0, p_1, \ldots, p_n$ – в общем случае функции от x.

Если $f(x) = 0$, то это уравнение называется линейным **однородным** уравнением, если $f(x) \neq 0$, то - линейным **неоднородным**. Если все коэффициенты $p_0, p_1, p_2, \ldots p_n$ – постоянные числа, то уравнение называется линейным дифференциальным уравнением **с постоянными коэффициентами**.

Левая часть выражения (51) описывает некоторое преобразование функции $y(x)$. Условно это преобразование обозначим оператором $L(y)$

$$L(y) = p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + ... + p_{n-1} y' + p_n y .$$

Тогда линейное однородное уравнение можно представить в виде

$$L(y) = 0 . \qquad (52)$$

Очевидно, что рассматриваемый оператор является линейным и обладает следующими свойствами:

- если функция y является решением уравнения (52), то функция Cy, где C – постоянное число, также является его решением
$$L(Cy) = CL(y);$$
- если некоторые функции y_1 и y_2 являются решениями уравнения (52), то их сумма (разность) также является его решением
$$L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2).$$

Следствие. Если некоторая комплексная функция $y(x)=u(x)+i\cdot v(x)$ является решением уравнения (52) с действительными коэффициентами p_0, p_1, $\ldots, p_n$, то его решениями являются также действительная и мнимая составляющие в отдельности

$$L(u+i\cdot v)=L(u)+i\cdot L(v)=0.$$

Поскольку операторное уравнение (52) всегда имеет и тривиальное решение $y(x)\equiv 0$, то совокупность всех его решений образует линейное пространство, нулем которого является функция $y(x)\equiv 0$.

Известно, что любое линейное пространство имеет базис в виде упорядоченной совокупности максимального количества линейно независимых элементов рассматриваемого пространства.

Система функций $y_1(x),y_2(x),\ldots,y_n(x)$ является **линейно зависимой**, если существуют такие постоянные $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ не все равные нулю, что на всем рассматриваемом интервале изменения аргумента выполняется тождество

$$\alpha_1 y_1(x)+\alpha_2 y_2(x)+\ldots+\alpha_n y_n(x)\equiv 0. \tag{53}$$

Если же тождество (53) выполняется только для нулевых коэффициентов, то система функций $y_1(x),y_2(x),\ldots,y_n(x)$ линейно независима на рассматриваемом интервале.

Для системы двух функций условие линейной независимости иногда определяют в следующем эквивалентном виде:

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)}\neq const. \tag{54}$$

Фундаментальной системой решений линейного однородного дифференциального уравнения n –го порядка (52) на интервале (a, b) называется всякая система n линейно независимых на этом интервале частных решений уравнения $y_1,y_2,\ldots,y_n$.

Определитель n – го порядка, составленный для n функций y_i и их производных вида

$$W=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}, \tag{55}$$

называется **определителем Вронского (вронскианом).**

(Юзеф Вроньский (1776 – 1853) – польский математик и философ - мистик)

Справедливы следующие теоремы.

<u>Теорема</u> (Необходимое условие линейной зависимости функций). *Если функции* $y_1,y_2,\ldots,y_n$ *линейно зависимы, то составленный для них определитель Вронского тождественно равен нулю на рассматриваемом интервале.*

Пример. Найти определитель Вронского для функций $y_1(x)=e^{k_1x}$, $y_2(x)=e^{k_2x}$, $y_3(x)=e^{k_3x}$.

Решение. Имеем

$$W\left[y_1, y_2, y_3\right] = \begin{vmatrix} e^{k_1x} & e^{k_2x} & e^{k_3x} \\ k_1e^{k_1x} & k_2e^{k_2x} & k_3e^{k_3x} \\ k_1^2e^{k_1x} & k_2^2e^{k_2x} & k_3^2e^{k_3x} \end{vmatrix} = e^{(k_1+k_2+k_3)x}(k_2-k_1)(k_3-k_1)(k_3-k_2)$$

6.2. *Структура решения линейного однородного ДУ*

Теорема (О структуре решения линейного однородного ДУ). *Если* $y_1, y_2, ..., y_n$ *- фундаментальная система решений на интервале (a, b), то общее решение линейного однородного дифференциального уравнения является линейной комбинацией этих частных решений.*

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + ... + C_ny_n, \tag{56}$$

где C_i –постоянные коэффициенты.

Для линейного уравнения (52) выполнены условия существования и единственности решения задачи Коши. Покажем, что постоянные $C_1, C_2, ..., C_n$ всегда можно подобрать единственным образом, чтобы удовлетворялись заданные НУ

$$y\big|_{x=x_0} = y_0, \quad y'\big|_{x=x_0} = y_0', \quad ..., \quad y^{(n-1)}\Big|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}. \tag{57}$$

Дифференцируя *n-1* раз общее решение (56) получим:

$$\begin{cases} C_1y_1 + C_2y_2 + ... + C_ny_n = y_0; \\ C_1y_1' + C_2y_2' + ... + C_ny_n' = y_0'; \\ ... \\ C_1y_1^{(n-1)} + C_2y_2^{(n-1)} + ... + C_ny_n^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}. \end{cases}$$

Или в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & ... & y_n(x_0) \\ y'(x_0) & y_2'(x_0) & ... & y_n'(x_0) \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & ... & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ ... \\ C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y' \\ ... \\ y_0^{(n-1)} \end{pmatrix}. \tag{58}$$

Система (58) имеет, очевидно, единственное решение относительно неизвестных $C_1, C_2, ..., C_n$, поскольку определителем системы является ненулевой определитель Вронского для независимых частных решений $y_1, y_2, ..., y_n$.

Пример. Уравнение $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$ имеет два частных решения $y_1 = x$ и $y_2 = x^2$. Эти решения образуют фундаментальную систему на любом интервале, не содержащем точку $x = 0$. Действительно,

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 2x^2 - x^2 = x^2.$$

Поэтому общее решение данного уравнения имеет вид

$$y = C_1x + C_2x^2.$$

Найдем частное решение при следующих начальных условиях:

$$y\big|_{x=1} = 0, \; y'\big|_{x=1} = 1.$$

Так как $y' = C_1 + 2C_2 x$, то, используя начальные условия, получим систему алгебраических уравнений (58) для определения постоянных C_1 и C_2:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0; \\ C_1 + 2C_2 = 1. \end{cases} \quad \text{откуда } C_1 = -1; C_2 = 1.$$

Таким образом, искомое частное решение имеет вид $y = x^2 - x$.

А можно ли по заданной фундаментальной системе решений получить ДУ?

Для этого дополним вронскиан (55) до следующего вида:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n & y \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' & y' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} & y^{(n-1)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0, \qquad (59)$$

где y - искомая функция, а $y_1, y_2, ..., y_n$ - *заданная фундаментальная система решений.*

Этот определитель равен нулю, поскольку общее решение $y(x)$ *искомого ДУ линейно зависит от частных решений* $y_1, y_2, ..., y_n$.

Раскрывая определитель (59) по элементам последнего столбца получим искомое ДУ.

Пример. Составить ДУ, для которого $y_1 = e^x, y_2 = e^{-x}$.

Составим и раскроем по последнему столбцу определитель (59)

$$\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} & y \\ e^x & -e^{-x} & y' \\ e^x & e^{-x} & y'' \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & y \\ 1 & -1 & y' \\ 1 & 1 & y'' \end{vmatrix} = 0; \quad y'' - y = 0.$$

6.3. *Задачи для самостоятельного решения (Краснов)*

Исследовать, являются ли данные функции линейно независимыми в их области определения. Найти определитель Вронского для указанных функций:

№		Ответы
1.	$1, x$	1
2.	$x, \frac{1}{x}$	$-\frac{2}{x}(x \neq 0)$
3.	$1, 2, x^2$	0
4.	e^{-x}, xe^{-x}	e^{-2x}
5.	$e^x, 2e^x, e^{-x}$	0

Составить линейные однородные дифференциальные уравнения, если заданы их фундаментальные системы решений:

№		Ответы
1.	e^{-x}, e^{x}	$y'' - y = 0$
2.	$1, e^{x}$	$y'' - y' = 0$
3.	e^{-2x}, xe^{-2x}	$y'' + 4y' + 4y = 0$
4.	$sin 3x, cos 3x$	$y'' + 9y = 0$
5.	$1, x$	$y'' = 0$
6.	e^{x}, e^{2x}, e^{3x}	$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$
7.	e^{x}, xe^{x}, x^2e^{x}	$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

6.4. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами

Отыскание общего решения линейного однородного дифференциального уравнения

$$L(y) = p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = 0 \tag{60}$$

сводится к нахождению его фундаментальной системы решений.

Однако, даже для уравнения второго порядка, если коэффициенты p зависят от x, эта задача ***не может быть решена в общем виде.***

Поэтому мы ограничимся рассмотрением важного частного случая, когда коэффициенты линейного уравнения *постоянны*.

По аналогии с решением $y = Ce^{kx}$ линейного однородного уравнения первого порядка $y' = \lambda y$, решение линейного однородного уравнения второго порядка будем искать в виде:

$$y = e^{\lambda x}. \tag{61}$$

Дифференцируем эту функцию n раз, подставляем выражения для $y, y', \ldots, y^{(n)}$ в уравнение (60) и сокращаем на $e^{kx} \neq 0$. В результате получим *так называемое характеристическое уравнение* данного дифференциального уравнения:

$$p_0 \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \ldots + p_n = 0. \tag{62}$$

Каждый действительный корень λ_i этого уравнения кратности k соответствует линейной комбинации фундаментальных решений уравнения (60) в форме $(C_1 + C_2 x + \ldots + C_k x^{k-1}) e^{\lambda_k}$. Пара комплексно сопряженных корней $(\lambda_{1,2})_j = \alpha \pm \beta i$ кратности m дает комбинацию фундаментальных решений вида $e^{\alpha x}\left[\left(C_1 + C_2 x + \ldots + C_m x^{m-1}\right) sin\, \beta x + \left(\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 x + \ldots + \tilde{C}_m x^{m-1}\right) cos\, \beta x\right]$.

В частности, характеристическое уравнение для линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами второго порядка

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \tag{63}$$

является квадратным: $\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0$. Поэтому общее решение уравнения (63) может иметь один из трех видов:

а) если дискриминант характеристического уравнения $D = a_1^2 - 4a_2 > 0,$ а $\lambda_1, \lambda_2\ (\lambda_1 \neq \lambda_2) -$ его различные действительные корни, то решение уравнения (63) выглядит так:

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \quad ; \tag{64}$$

б) если $D = 0$, характеристическое уравнение имеет один двукратный корень λ_0, и общее решение уравнения (63) имеет вид:

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{\lambda_0 x}; \qquad (65)$$

в) при $D < 0$ характеристическое уравнение имеет комплексно сопряженные корни $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, а общее решение уравнения (63) записывается в форме:

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x). \qquad (66)$$

Пример 1. Найти общее решение уравнения $y'' - 5y' + 6y = 0$.

Решение. Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0,\ \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3.$$

Значит, общее решение записывается в виде (64): $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$.

Пример 2. Найти общее решение уравнения $y^{(5)} + 4y^{(4)} + 13y''' = 0.$

Решение. Характеристическое уравнение $\lambda^5 + 4\lambda^4 + 13\lambda^3 = 0$ имеет один действительный корень $\lambda = 0$ кратности 3 и два комплексно сопряженных корня: $\lambda = -2 \pm 3i$. Поэтому, так как $e^{0\cdot x} = 1$, общее решение записывается в форме (65) и (66):

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + e^{-2x}\left(C_4 \sin 3x + C_5 \cos 3x\right).$$

6.5. Линейные неоднородные уравнения

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x) \qquad (67)$$

Теорема. (*о структуре общего решения*). Если $y^*(x)$ – частное решение линейного неоднородного уравнения (67), а $\bar{y}$ - общее решение соответствующего однородного уравнения

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0,$$

то функция

$$y = \bar{y}(x) + y^*(x)$$

является общим решением неоднородного дифференциального уравнения (67).

Таким образом, решение уравнения с правой частью (67) сводится:

1) к разысканию фундаментальной системы решений соответствующего однородного уравнения;

2) к разысканию хотя бы одного частного решения данного неоднородного уравнения.

Первая из этих задач подробно рассмотрена выше (для уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами). Вторая задача может быть решена **методом вариации произвольных постоянных**. Однако в большинстве случаев этот метод приводит к громоздким вычислениям и сложным квадратурам. Поэтому возникает вопрос о том, как найти одно частное решение, не прибегая к методу вариации. Для уравнений с постоянными коэффициентами в тех случаях, **когда правая часть уравнения удовлетворяет некоторым дополнительным условиям**, частное решение удается найти сравнительно легко *методом неопределенных коэффициентов.*

Решение методом неопределенных коэффициентов

Этот метод применим только к линейным уравнениям с постоянными коэффициентами и только в том случае, когда правая часть уравнения имеет вид:

$$f\left(x\right)=e^{\alpha x}\left[P_n\left(x\right)sin\,\beta x+Q_m\left(x\right)cos\,\beta x\right], \qquad (68)$$

где $P_n\left(x\right)$ и $Q_m\left(x\right)$ - многочлены n-го и m-го порядков соответственно.

В этом случае частное решение определяется следующим образом:

$$y^*=x^re^{\alpha x}\left[U_k\left(x\right)sin\,\beta x+V_k\left(x\right)cos\,\beta x\right], \qquad (69)$$

где r равно кратности корня $\alpha+i\beta$ характеристического уравнения (62) (если уравнение (62) такого корня не имеет, то $r=0$);

U_k и V_k - полные многочлены от x порядка k с неопределенными коэффициентами, причем k равно наибольшему из чисел n и m (если в выражение функции (68) входит только одна из функций $sin\,\beta x$ или $cos\,\beta x$, то в выражение (69) следует *всегда* вводить обе эти функции).

Неопределенные коэффициенты находятся подстановкой частного решения (69) и его производных в исходное дифференциальное уравнение (67).

Пример 1. $y''-y'=e^x\left(2x+1\right)$**.**

1.

$$y''-y'=0\,;$$

$$k^2-k=0; \quad \rightarrow \quad k_1=0; \quad k_2=1;$$

$$\overline{y}=C_1+C_2e^x.$$

2.

$$f\left(x\right)=e^x\left(2x+1\right);$$

$$\beta=0, k_2=\alpha+i\beta=1, \quad k_1\neq k_2, \qquad r=1 \qquad y^*=x\cdot e^x\left(Ax+B\right)$$

$$(y^*)'=(2Ax+B)e^x+(Ax^2+Bx)e^x$$

$$(y^*)''=2Ae^x+\left(2Ax+B\right)e^x+\left(2Ax+B\right)e^x+\left(Ax^2+Bx\right)e^x=$$

$$=2Ae^x+\left(4Ax+2B\right)e^x+\left(Ax^2+Bx\right)e^x=$$

$$2Ae^x+\left(4Ax+2B\right)e^x+\left(Ax^2+Bx\right)e^x-(2Ax+B)e^x-(Ax^2+Bx)e^x=e^x\left(2x+1\right)$$

$$2A+\left(4Ax+2B\right)+\left(Ax^2+Bx\right)-(2Ax+B)-(Ax^2+Bx)=\left(2x+1\right)$$

$$2Ax+\left(2A+B\right)=2x+1$$

$$x \qquad 2A=2 \qquad A=1$$

$$x^0 \quad 2A+B=1 \quad B=-1$$

$$y^*=x\cdot e^x\left(x-1\right)$$

Тогда $y=C_1+C_2e^x+x\cdot e^x\left(x-1\right)$.

Пример 2. $y''-2y'=cos\,x-3sin\,x$**.**

Общее решение этого уравнения имеет вид $y=\overline{y}+y^*$.

$$k^2-2k=0,\quad k_1=0,k_2=2,\quad \bar{y}=C_1+C_2e^{2x}.$$

$$\alpha=0;\beta=1;\quad k_1\neq i,k_2\neq i,\quad r=0,\quad y^*=M\cos x+N\sin x$$

$$\left(y^*\right)'=-M\sin x+N\cos x,\quad y^{*''}=-M\cos x-N\sin x$$

$$-M\cos x-N\sin x+2M\sin x-2N\cos x=\cos x-3\sin x$$

$$\cos x:\qquad -M-2N=1;\rightarrow\quad M=-\frac{7}{5}$$

$$\sin x:\qquad 2M-N=-3;\rightarrow\quad N=\frac{1}{5}$$

$$y^*=-\frac{7}{5}\cos x+\frac{1}{5}\sin x,$$

$$y=C_1+C_2e^{2x}-\frac{7}{5}\cos x+\frac{1}{5}\sin x.$$

Метод вариации произвольных постоянных (Лагранжа)

Рассмотрим теперь метод, позволяющий отыскивать частное решение линейного уравнения с правой частью

$$y''+a_1y'+a_2y=f\left(x\right)$$

где $f(x)$ — любая непрерывная функция.

При использовании этого метода нам нужно знать общее решение соответствующего уравнения без правой части. Метод вариации постоянных в равной мере применим как к уравнениям с постоянными коэффициентами, так и к уравнениям, в которых коэффициенты a_1 и a_2 являются функциями от x. Однако, так как мы умеем решать лишь уравнения с постоянными коэффициентами, то и излагаемый метод практически мы сможем применять только к таким уравнениям.

Пусть $\bar{y}=C_1y_1+C_2y_2$ - общее решение соответствующего однородного уравнения.

Будем искать частное решение этого уравнения в форме $y^*=z_1y_1+z_2y_2$

рассматривая z_1 и z_2 как некоторые известные функции от x.

Продифференцируем y^*

$$y^{*\prime}=z_1'y_1+z_1y_1'+z_2'y_2+z_2y_2'$$

Подберем функции z_1 и z_2 так, чтобы $z_1'y_1+z_2'y_2=0$

Тогда $y^{*\prime}=z_1y_1'+z_2y_2'$

Продифференцируем это выражение

$$y^{*''}=z_1'y_1'+z_1y_1''+z_2'y_2'+z_2y_2''=z_1y_1''+z_2y_2''+z_1'y_1'+z_2'y_2'$$

Подставим $y^*, y^{*\prime}, y^{*''}$ в данное уравнение, получим

$$a_0(z_1y_1''+z_2y_2''+z_1'y_1'+z_2'y_2')+a_1(z_1y_1'+z_2y_2')+a_2(z_1y_1+z_2y_2)=f\left(x\right)$$

Отсюда

$$z_1(a_0y_1''+a_1y_1'+a_2y_1)+z_2(a_0y_2''+a_1y_2'+a_2y_2)+z_1'y_1'+z_2'y_2'=f\left(x\right)$$

Так как y_1 и y_2 - решения однородного уравнения, то

$$a_0y_1''+a_1y_1'+a_2y_1=0,\quad a_0y_2''+a_1y_2'+a_2y_2=0$$

Следовательно,

$$z_1'y_1' + z_2'y_2' = f(x)$$

Таким образом, $y^* = z_1y_1 + z_2y_2$ - решение неоднородного линейного уравнения, если функции z_1 и z_2 удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} z_1'y_1 + z_2'y_2 = 0 \\ z_1'y_1' + z_2'y_2' = f(x) \end{cases}$$

Так как, $W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0$ для линейно независимых функций y_1 и y_2, то решая эту систему, найдем z'_1 и z'_2

$$z'_1 = \varphi_1(x) \text{ и } z'_2 = \varphi_2(x).$$

Интегрируя, получим

$$z_1 = \int \varphi_1(x)dx + c_1, \quad z_2 = \int \varphi_2(x)dx + c_2,$$

где c_1 и c_2 - постоянные интегрирования.

Пример. $y'' + y = secx$

$$y'' + y = 0$$

$$k^2 + 1 = 0; \qquad k_1 = i;\ k_2 = -i$$

$$y = C_1 cos\ x + C_2 sin\ x$$

$$y^* = z_1 cos\ x + z_2 sin\ x$$

$$y^{*\prime} = z'_1 cos\ x - z_1 sin\ x + z'_2 sin\ x + z_2 cos\ x$$

$$z'_1 cos\ x + z'_2 sin\ x = 0$$

$$y^{*\prime} = -z_1 sin\ x + z_2 cos\ x$$

$$y^{*\prime\prime} = -z_1 cos\ x - z_2 sin\ x - z'_1 sin\ x + z'_2 cos\ x.$$

Подставим y^*, $y^{*\prime}$, $y^{*\prime\prime}$ в данное уравнение, после преобразований получим

$$\begin{cases} z'_1 cos\ x + z'_2 sin\ x = 0 \\ -z'_1 sin\ x + z'_2 cos\ x = sec\ x \end{cases}$$

$$z'_1 = W_1/W = -tg\ x \Rightarrow z_1 = -\int tgxdx + C_1 = ln|cos\ x| + C_1$$

$$z'_2 = W_2/W = 1; \Rightarrow z_2 = \int dx + C_2 = x + C_2$$

Следовательно, $y^* = cosxln|cos\ x| + xsinx$

$y = C_1cosx + C_2sinx + cosxln|cos\ x| + xsinx$ – общее решение.

Вывод. Метод Лагранжа применим для решения линейных решений неоднородных дифференциальных уравнений с любыми коэффициентами и любой правой частью, когда известно общее решение соответствующего однородного уравнения.

6.6. *Задания для решения в аудитории:*

Найти общее решение однородного ЛДУ:

1. $y'' + 5y' + 6y = 0$

2. $y'' + 6y' + 9y = 0$

3. $y'' - 4y' + 13y = 0$

4. $y'' - 4y = 0$

5. $y'' + 4y = 0$

Найти частное решение однородного ЛДУ:

6. $y'' - 3y' + 2y = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 4$

7. $y'' - 2y' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

Найти общее решение неоднородного ЛДУ:

1. $y'' - 4y' + 3y = x^2 - 1$

2. $y'' - 4y' + 5y = (5x - 1)cosx$

3. $y'' + y' - 6y = 36x$

4. $y'' - 5y' + 4y = e^{4x}$

5. $y'' + 16y = 2cos^2 x$

6. $y'' - 7y' + 12y = 2\sin x + e^{3x}$

Решить методом вариации произвольных постоянных:

$y'' + y = \sin 2x$

7. Системы линейных дифференциальных уравнений (СЛДУ)

7.1. Системы однородных линейных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами

Пусть дана СЛДУ с постоянными коэффициентами (рассмотрим на примере системы второго порядка)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases} \quad \text{или в матричной форме} \quad \dot{X} = AX \tag{70}$$

Решение будем искать в виде $X = Ve^{\lambda t}$, где V - некоторый вектор.

Подставим это решение в матричное уравнение (70) $\lambda Ve^{\lambda t} = A \cdot Ve^{\lambda t}$, получим известную задачу на собственные значения

$$\lambda V = A \cdot V; \quad \to \quad (A - E\lambda)V = 0. \tag{71}$$

Линейное алгебраическое уравнение (71) имеет ненулевое решение V, если определитель системы - характеристическое уравнение равен нулю

$$\Delta = |A - E\lambda| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{72}$$

Пусть характеристическое уравнение (72) имеет n=2 различных корней λ_1 и λ_2, которые являются собственными числами матрицы A системы. Тогда каждому собственному числу λ_i соответствует свой собственный вектор $V_{\lambda i}$. Для нахождения собственных векторов необходимо решить систему уравнений (71) для каждого собственного числа.

Вся совокупность частных решений системы ДУ (70) образует фундаментальную систему решений

$$X_{\lambda_1} = e^{\lambda_1 t}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}_{\lambda_1}; \quad X_{\lambda_2} = e^{\lambda_2 t}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}_{\lambda_2}.$$

Линейная комбинация этих решений представляет собой общее решение СЛДУ

$$X = C_1 e^{\lambda_1 t}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}_{\lambda_1} + C_2 e^{\lambda_2 t}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}_{\lambda_2}. \tag{73}$$

Пример 1. Решить задачу Коши для системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 4y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 3y \end{cases}, \text{ если } x(0) = 2,\ y(0) = -5.$$

Решение.

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 3 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - 5\lambda - 6 = 0,\ \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 6.$$

Для $\lambda_1 = -1$ найдем собственный вектор $V_{\lambda 1}$ из (71)

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};\ 3v_1 + 4v_2 = 0;\ \ v_1 = 4; v_2 = -3;\ \ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}_{\lambda_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Для $\lambda_2 = 6$, по аналогии, отыщем собственный вектор $V_{\lambda 2}$

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};\ v_1 - v_2 = 0;\ \ v_1 = 1; v_2 = 1;\ \ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}_{\lambda_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Итак, общее решение системы:

$$X = C_1 e^{-t}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} + C_2 e^{6t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Для определения частного решения СЛДУ, соответствующего заданным НУ, подставим их в полученное общее решение и найдем С1 и С2

$$X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix};\ \text{ или }\ \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix},$$

откуда $C_1 = 1;\ \ C_2 = -2$.

Тогда частное решение примет вид

$$X = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-t} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} e^{6t}.$$

Если корни характеристического уравнения – комплексно сопряженные числа $\alpha \pm \beta i$, то решениями СЛДУ будут отдельно действительная и мнимая составляющие собственного числа $\alpha + \beta i$.

Пример 2. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2(t) = -2x_1 + 3x_2. \end{cases}$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

имеет комплексно сопряженные корни $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$. Для нахождения собственного вектора $V_{\lambda 1}$, соответствующего корню $\lambda_1 = 2 + i$, получаем систему

$$\begin{pmatrix} -1-i & 1 \\ -2 & 1-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Полагая $v_1 = 1$, находим $v_2 = 1 + i$, т.е.

$$V_\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}\ \text{ и }\ X_\lambda(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} e^{(2+i)t} = e^{2t}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}\right)(cos\,t + i\,sin\,t).$$

Отсюда пара действительных частных решений имеет следующий вид:

$$X_{\lambda 1}(t) = Re\left(X_\lambda(t)\right) = \begin{pmatrix} cos\,t \\ cos\,t - sin\,t \end{pmatrix} e^{2t},$$

$$X_{\lambda 2}(t) = Im\left(X_\lambda(t)\right) = \begin{pmatrix} sin\,t \\ cos\,t + sin\,t \end{pmatrix} e^{2t}.$$

Получаем общее решение

$$X(t) = C_1\begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix}e^{2t} + C_2\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix}e^{2t} = \begin{pmatrix} C_1 \cos t + C_2 \sin t \\ (C_1 + C_2)\cos t + (C_2 - C_1)\sin t \end{pmatrix}e^{2t}.$$

Если λ — корень характеристического уравнения кратности $r \ge 2$, то соответствующее этому корню решение системы (70) ищется в виде вектора

$$X_\lambda(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 t + \ldots + \gamma_1 t^{r-1} \\ \alpha_2 + \beta_2 t + \ldots + \gamma_2 t^{r-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_n + \beta_n t + \ldots + \gamma_n t^{r-1} \end{pmatrix}e^{\lambda t}, \qquad (74)$$

коэффициенты которого $\alpha_i, \beta_i, \ldots, \gamma_i$ $i = 1, \ldots, n;$ определяются из системы линейных уравнений, получающейся приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях *t* в результате подстановки вектора (74) в исходную СЛДУ.

Пример 3.

Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 2x_1 - x_2, \\ \dot{x}_2(t) = 4x_1 + 6x_2. \end{cases}$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 4 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 4)^2 = 0$$

имеет корень $\lambda = 4$ кратности $r = 2$. Поэтому ищем решение системы в виде

$$X_\lambda(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 t \\ \alpha_2 + \beta_2 t \end{pmatrix}e^{4t}.$$

Подставляем это выражение в исходную СЛДУ и сокращаем на e^{4t}:

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}t = \begin{pmatrix} 2\alpha_1 - \alpha_2 \\ 4\alpha_1 + 6\alpha_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\beta_1 - \beta_2 \\ 4\beta_1 + 6\beta_2 \end{pmatrix}t.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях *t*, получаем:

$$\begin{cases} \beta_1 + 4\alpha_1 = 2\alpha_1 - \alpha_2, \\ \beta_2 + 4\alpha_2 = 4\alpha_1 + 6\alpha_2, \\ 4\beta_1 = 2\beta_1 - \beta_2, \\ 4\beta_2 = 4\beta_1 + 6\beta_2. \end{cases} \qquad \begin{cases} \beta_1 + 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0, \\ \beta_2 - 4\alpha_1 - 2\alpha_2 = 0, \\ 2\beta_1 + \beta_2 = 0, \\ -2\beta_2 - 4\beta_1 = 0. \end{cases}$$

Полагая $\alpha_1 = C_1$ и $\beta_1 = C_2$, имеем $\beta_2 = -2C_2$ и $\alpha_2 = -2C_1 - C_2$. Таким образом, общее решение системы имеет вид

$$X(t) = X_\lambda(t) = \begin{pmatrix} C_1 + C_2 t \\ -2(C_1 + C_2) - 2C_2 t \end{pmatrix}e^{4t}.$$

7.2. *Системы неоднородных линейных дифференциальных уравнений*

Нормальная линейная неоднородная система дифференциальных уравнений имеет вид

$$\dot{X}(t) = A(t)\cdot X(t) + F(t) \tag{75}$$

По аналогии со скалярным линейным дифференциальным уравнением, общее решение системы (75) представляет собой сумму общего решения $\bar{X}(t)$соответствующей однородной системы $\dot{X}(t) = A(t)\cdot X(t)$ и частного решения неоднородной системы $X^*(t)$

$$X(t) = \bar{X}(t) + X^*(t).$$

Если известна фундаментальная система решений однородной системы уравнений $X_i(t), i = 1,...,n$, то обще решение неоднородной системы можно найти методом вариации произвольных постоянных. Так, полагая

$$X(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i(t)\cdot X_i(t), \tag{76}$$

определяем функции $C_i(t)$ подстановкой (76) в систему (75). Учитывая, что

$$\dot{X}_i(t) - A(t)\cdot X_i(t) = 0, \quad i = 1,...,n$$

приходим к системе уравнений относительно $\dot{C}_i(t)$

$$\sum_{i=1}^{n} \dot{C}_i(t)\cdot X_i(t) = F(t). \tag{77}$$

Интегрируя эти выражения, получаем функции $C_i(t)$с точностью до произвольных постоянных. Подставляя их в (76), получаем искомое общее решение неоднородной системы (75)
.

Пример 4.

Зная фундаментальную систему решений

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{7t}, \quad X_2(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} e^{t}$$

однородной системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 6x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2(t) = 5x_1 + 2x_2, \end{cases}$$

найти общее решение неоднородной системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 6x_1 + x_2 + t, \\ \dot{x}_2(t) = 5x_1 + 2x_2 + 1. \end{cases}$$

Воспользуемся методом вариации произвольных постоянных. Для функций $\dot{C}_1(t)$ и $\dot{C}_2(t)$ составим систему вида (77)

$$\dot{C}_1(t)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{7t} + \dot{C}_2(t)\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} e^{t} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Найдя

$$\dot{C}_1(t)=\frac{5t+1}{6}e^{-7t},\ \dot{C}_2(t)=\frac{1-t}{6}e^{-t}$$

и проинтегрировав по частям, получим

$$C_1(t)=-\left(\frac{5}{42}t+\frac{2}{49}\right)e^{-7t}+C_1,\ C_2(t)=\frac{1}{6}te^{-t}+C_2.$$

Таким образом, общее решение системы запишется в виде

$$X(t)=\left(-\left(\frac{5}{42}t+\frac{2}{49}\right)e^{-7t}+C_1\right)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{7t}+\left(\frac{1}{6}te^{-t}+C_2\right)\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}e^{t}=$$

$$=C_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{7t}+C_2\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}e^{t}+\begin{pmatrix}-\dfrac{2}{7}t-\dfrac{2}{49}\\ \dfrac{5}{7}t-\dfrac{2}{49}\end{pmatrix}.$$

7.3. Задания для решения в аудитории

1. Найти общее решение системы:

а). $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x-y,\\ \dfrac{dy}{dt}=-4x+4y.\end{cases}$

б). $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2x+y,\\ \dfrac{dy}{dt}=-6x-3y.\end{cases}$

в). $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x + 8y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y. \end{cases}$

2. Решить задачу Коши для системы:

а). $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - 1, & x(0) = 1, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 2y, & y(0) = -1. \end{cases}$

б). $\begin{cases} x' + y = 0, & x(0) = 1, \\ x + y' = 0, & y(0) = 1; \end{cases}$

8. ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

8.1. Числовые ряды

Пусть $u_1, u_2, u_3, ..., u_n, ...$ бесконечная числовая последовательность. Выражение вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ... \tag{78}$$

называется числовым рядом (или просто рядом), а числа $u_1, u_2, u_3, ...$ называются членами ряда*;* u_n при произвольном *n* называется общим членом ряда.

Числовой ряд задан, если известен его общий член u_n, или известен закон, по которому он может быть получен.

Сумму первых *n* членов числового ряда обозначают через S_n и называют ***частичной суммой*** ряда :

$$S_1 = u_1;\quad S_2 = u_1 + u_2;\quad S_3 = u_1 + u_2 + u_3;\quad ... ;\quad S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n . \tag{79}$$

Определение Ряд (78) называется сходящимся, если *n*-я частичная сумма S_n при неограниченном возрастании *n* стремится к конечному пределу, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, где S называется суммой ряда (78). Если же *n*-я частичная сумма ряда при $n \to \infty$ не стремится к конечному пределу или вообще не имеет никакого предела, то ряд называется расходящимся. Ряд

$$a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1} + ... \tag{80}$$

называется *геометрической прогрессией*, a - первый член ряда; q – знаменатель прогрессии, сумма ряда $S_n = \dfrac{a - aq^n}{1-q}$.

При |q|<1 ряд (80) сходится, его сумма равна $S = \dfrac{a}{1-q}$ и при $|q| \geq 1$ ряд (80) расходится.

Ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n} + ... \tag{81}$$

называется *гармоническим рядом*, он расходится. Ряд

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + ... + \frac{1}{n^p} + ... \tag{82}$$

называется обобщенным гармоническим рядом, при $p>1$ этот ряд сходится, а при $p \leq 1$ он расходится.

Необходимое, но не достаточное условие сходимости ряда

Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то его общий член u_n стремится к 0 при $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0 \tag{83}$$

Если общий член ряда u_n не стремится к 0 при $n \to \infty$, то ряд расходится.

Достаточные признаки сходимости рядов

1. ***Признаки сравнения***

Пусть даны два ряда с положительными членами

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n \qquad (*)$$

$$v_1+v_2+\ldots+v_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}v_n \qquad (**)$$

1) Если члены ряда (*) не превосходят соответствующих членов ряда (**), т. е. $u_n \le v_n$ и ряд (**) сходится, то сходится и ряд (*).

2) Если члены ряда (*) не меньше соответствующих членов ряда (**), т.е. $u_n \ge v_n$ и ряд (**) расходится, то расходится и ряд (*).

Этот признак остаётся в силе, если неравенства $u_n < v_n \quad (u_n > v_n)$ выполняются не при всех n , а лишь начиная с некоторого номера $n = N$.

2. ***Предельный признак сравнения***

Пусть даны два знакоположительных ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$. Если существует конечный, отличный от нуля, предел $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=A \quad (0<A<\infty)$, то оба ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ сходятся и расходятся одновременно.

3. ***Признак Даламбера***

Если для знакоположительного ряда $u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$ существует $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$, то если $l<1$ ряд сходится, если же $l>1$, то ряд расходится.

Если $l=1$, то ряд может сходиться, а может и расходиться. В этом случае признак Даламбера ответа не дает, приходится исследовать на сходимость ряд с помощью других признаков.

4. ***Признак Коши*** (Радикальный признак)

Если для знакоположительного ряда $u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$ существует $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$, то если $l<1$, то ряд сходится, если $l>1$, то ряд расходится.

Если $l=1$, то радикальный признак не дает ответа о сходимости ряда.

5. ***Признак Коши***. *(*Интегральный признак).

Пусть члены знакоположительного ряда $u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$ $u_1 \ge u_2 \ge u_3 \ge \ldots$ и $f(x)$ такая непрерывная невозрастающая на промежутке $[1;+\infty)$ функция, что $f(1)=u_1$, $f(2)=u_2$,…, $f(n)=u_n$,…

Тогда, если несобственный интеграл $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ сходится, то и ряд сходится, а если он расходится, то и ряд расходится.

Решение типовых примеров

1 Дан общий член ряда $u_n = \dfrac{2n-1}{3^n}$. Написать первые четыре члена ряда.

Решение

Если $n=1$, то $u_1 = \dfrac{1}{3}$; если $n=2$, то $u_2 = \dfrac{3}{9}$; если $n=3$, то $u_3 = \dfrac{5}{27}$; если $n=4$, то $u_4 = \dfrac{7}{81}$;…. Ряд можно записать в виде $\dfrac{1}{3}+\dfrac{3}{9}+\dfrac{5}{27}+\dfrac{7}{81}+\dots$.

2 Найти общий член ряда $\dfrac{4}{2}+\dfrac{16}{4}+\dfrac{64}{6}+\dfrac{256}{8}+\dots$.

Решение

Числители образуют геометрическую прогрессию $4, 4^2, 4^3, 4^4, \dots$; n-й член этой прогрессии $b_n = 4^n$. Знаменатели образуют арифметическую прогрессию $2,4,6,8,\dots$; n-й член этой прогрессии находим по формуле $a_n = a_1 + d(n-1)$, где $a_1 = 2$, $d = 2$, поэтому $a_n = 2n$. Следовательно, общий член этого ряда $u_n = \dfrac{4^n}{2n}$.

3 Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+5n+6}$.

Решение

Представим общий член ряда в виде суммы простейших дробей:

$$u_n = \frac{1}{n^2+5n+6} = \frac{1}{(n+2)(n+3)} = \frac{A}{n+2}+\frac{B}{n+3}$$

Умножая обе части этого выражения на знаменатель, придём к тождеству

$$1 \equiv A(n+3)+B(n+2).$$

Полагая $n=-2$, находим $1 = A$; значит $A=1$;

$n=-3$, находим $1 = -B$; значит $B=-1$.

Таким образом, $u_n = \dfrac{1}{n+2}-\dfrac{1}{n+3}$, т.е. $u_n = \dfrac{1}{n+2}-\dfrac{1}{n+3}$.

Отсюда $u_1 = \dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}$; $u_2 = \dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{5}$; $u_3 = \dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{6}$; $u_4 = \dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{7}$;….

Следовательно,

$$S_n = \frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\dots+\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3} = \frac{1}{3}-\frac{1}{n+3}.$$

Так как $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{n+3}\right) = \dfrac{1}{3}$, то ряд сходится.

4 Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n+4}$.

Решение

Сравним этот ряд с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ (то есть с бесконечно убывающей геометрической прогрессией, так как $q=\frac{1}{3}<1$), этот ряд сходится.

Члены данного ряда меньше соответствующих членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$, следовательно, данный ряд сходится.

5 Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4\cdot 2^n-3}$.

Решение

Сравним этот ряд с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ ($q=\frac{1}{2}<1$,бесконечно убывающая геометрическая прогрессия). Применим предельный признак сравнения рядов:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{4\cdot 2^n-3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4-\frac{3}{2^n}}=\frac{1}{4}.$$

Так как предел конечен и отличен от нуля и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ сходится, то сходится и данный ряд.

6 Исследовать сходимость ряда $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\frac{1}{11}+...+\frac{1}{3n-1}+...$.

Решение

Сравним данный ряд с гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ (расходится).

Воспользуемся предельным признаком сравнения $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n-1}=\frac{1}{3}$. Следовательно, данный ряд расходится.

7 Исследовать сходимость ряда $\frac{2}{1}+\frac{2^2}{2^{10}}+\frac{2^3}{3^{10}}+\frac{2^4}{4^{10}}+...+\frac{2^n}{n^{10}}+...$.

Решение

Применим признак Даламбера: имеем $u_n=\frac{2^n}{n^{10}}$, $u_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{(n+1)^{10}}$.

Тогда $l=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\cdot n^{10}}{(n+1)^{10}\cdot 2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot n^{10}}{(n+1)^{10}}=2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^{10}}=2$.

Так как $l>1$, то данный ряд расходится.

8 Исследовать сходимость ряда

$$\frac{10}{1!}+\frac{10^2}{3!}+\frac{10^3}{5!}+\frac{10^4}{7!}+\ldots+\frac{10^n}{(2n-1)!}+\ldots.$$

Решение

Применим признак Даламбера: имеем $u_n=\dfrac{10^n}{(2n-1)!}$,

$$u_{n+1}=\frac{10^{n+1}}{\big(2(n+1)-1\big)!}=\frac{10^{n+1}}{(2n+2-1)!}=\frac{10^{n+1}}{(2n+1)!}.$$

Тогда $l=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10^{n+1}(2n-1)!}{(2n+1)!10^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10}{2n(2n+1)}=0$.

Так как $l<1$, то данный ряд сходится.

9 Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2}$.

Решение

Здесь удобнее применить радикальный признак Коши, поскольку $\sqrt[n]{u_n}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n$.

$l=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\dfrac{e}{3}$, так как $l<1$, то данный ряд сходится.

10 Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n^2+1}$.

Решение

Воспользуемся интегральным признаком Коши:

$$u_n=\frac{n}{n^2+1},\qquad f(x)=\frac{x}{x^2+1},\quad \int_1^{\infty}\frac{x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int_1^{\infty}\frac{2x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}ln\left|x^2+1\right|_1^{\infty}=\infty.$$

Интеграл расходится, поэтому расходится и данный ряд.

<u>Задания для самостоятельного решения</u>

11 Записать 4-5 первых членов ряда, по известному общему члену U_n.

а) $U_n=\dfrac{3n-2}{n^2+1}$; *б)* $U_n=\dfrac{2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2}$;

в) $U_n=\dfrac{n^3}{e^n}$; *г)* $U_n=\dfrac{1}{(2n-1)3^{n-1}}$;

д) $U_n = \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$; *е)* $U_n = \dfrac{n^2}{n!}$.

12 Написать простейшую формулу *n–го* члена ряда по указанным членам

а) $1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{7}+\ldots;$ *б)* $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{8}+\ldots;$

в) $1+\dfrac{2}{2}+\dfrac{3}{4}+\dfrac{4}{8}+\ldots;$ *г)* $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 6}+\ldots;$

д) $1+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{16}+\ldots;$ *е)* $\dfrac{3}{4}+\dfrac{4}{9}+\dfrac{5}{16}+\dfrac{6}{25}+\ldots;$

ж) $\dfrac{2}{5}+\dfrac{4}{8}+\dfrac{6}{11}+\dfrac{8}{14}+\ldots;$ *з)* $\dfrac{1}{2+3}+\dfrac{1}{4+3}+\dfrac{1}{8+3}+\dfrac{1}{16+3}+\ldots;$

и) $1+\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\ldots.$

13 Проверить, выполняется ли необходимый признак сходимости рядов

а) $\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{5}+\dfrac{6}{7}+\ldots+\dfrac{2n}{2n+1}+\ldots$ *б)* $1+\dfrac{3}{4}+\dfrac{5}{9}+\ldots+\dfrac{2n-1}{n^2}+\ldots$

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} cos\dfrac{1}{n}$ *г)* $\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{4}+\dfrac{5}{6}+\ldots+\dfrac{2n-1}{2n}+\ldots$

д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(n+1)^3}$ *е)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} arctg\dfrac{1}{n}$

ж) $2+\dfrac{5}{8}+\dfrac{10}{27}+\ldots+\dfrac{n^2+1}{n^3}+\ldots$ *з)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\sin\dfrac{1}{n}$

14 Найти сумму *n* – первых членов ряда (S_n), доказать сходимость ряда, пользуясь непосредственно определением сходимости и найти сумму ряда S

а) $\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}+\ldots;$

б) $\frac{5}{6}+\frac{13}{36}+\ldots+\frac{3^n+2^n}{6^n}+\ldots$;

в) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}+\ldots$;

г) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\ldots$.

15 Исследовать на сходимость по признаку сравнения

а) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 9}+\frac{1}{3\cdot 27}+\ldots+\frac{1}{n\cdot 3^n}+\ldots$;

б) $\frac{1}{\sqrt{1\cdot 2}}+\frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}}+\frac{1}{\sqrt{3\cdot 4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}+\ldots$;

в) $\frac{1}{ln 2}+\frac{1}{ln 3}+\frac{1}{ln 4}+\ldots$;

г) $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots$;

д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8^n-1}{9^n+3}$.

16 Исследовать на сходимость, используя признак Даламбера

а) $1+\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 5^2}+\frac{1}{4\cdot 5^3}+\ldots$; *б)* $\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{6}{27}+\frac{8}{81}+\ldots$;

в) $1+\frac{2}{2!}+\frac{4}{3!}+\frac{8}{4!}+\ldots;$

г) $1+\frac{3}{2\cdot 3}+\frac{3^2}{2^2\cdot 5}+\frac{3^3}{2^3\cdot 7}+\ldots.$

д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)!}{5^n\cdot n}$

17 Исследовать на сходимость, используя радикальный признак Коши

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^n};$

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2};$

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n;$

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin^n\frac{\pi}{2n};$

д) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^2+1}{2n^2-1}\right)^n.$

18 Исследовать на сходимость, используя интегральный признак Коши

а) $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots.+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots;$

б) $1+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{10}}+\ldots;$

в) $1+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{5\sqrt{5}}+\ldots;$

г) $\frac{1}{2\ln 2}+\frac{1}{3\ln 3}+\frac{1}{4\ln 4}+\ldots;$

д) $\frac{1}{2\ln^2 2}+\frac{1}{3\ln^2 3}+\frac{1}{4\ln^2 4}+\ldots.$

Исследовать сходимость рядов:

19 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{5^n+2}$;

20 $\frac{1}{8}+\frac{1}{7^2+1}+\frac{1}{7^3+1}+\frac{1}{7^4+1}+\ldots$;

21 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{\sqrt{n^2+n}}$;

22 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{3n+2}}$;

23 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{10}{11}\right)^n\cdot n^5$;

24 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{6^n}$;

25 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{3^n(2n-1)}$;

26 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{3^n n!}$;

27 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^{2n}}{(2n-1)!}$;

28 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n+2)!}{10^n n^2}$;

29 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+2n+1}{3n^2+2n+1}\right)^n$;

30 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}$;

31 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(arcsin\frac{1}{2^n}\right)^{3n}$;

32 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(arcsin\frac{n+3}{2n+5}\right)^n$;

33 $\frac{1}{8}+\frac{1}{18}+\frac{1}{28}+\ldots+\frac{1}{10n-2}+\ldots$;

34 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)ln^2(3n+1)}$;

35 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+3}$;

36 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)^2}$.

8.2. Знакочередующиеся ряды

Определение Ряд, у которого любые два соседних члена имеют разные знаки, называется знакочередующимся.

Знакочередующийся ряд имеет вид

$$u_1-u_2+u_3-u_4+\ldots+(-1)^{n+1}u_n+\ldots, \tag{84}$$

где $u_n>0$ для всех $n\in N$.

Для знакочередующегося ряда имеет место достаточный признак сходимости, который называют признаком Лейбница.

Признак Лейбница Если в знакочередующемся ряде (84) абсолютные величины членов ряда убывают $|u_1|>|u_2|>\ldots>|u_n|>\ldots$ и общий член ряда u_n стремится к 0 при неограниченном увеличении его номера, то есть $\lim_{n\to\infty}|u_n|=0$, то ряд (84) сходится, его сумма положительная и не превосходит первого члена ряда ($0 < S < u_1$).

Замечание Если хотя бы одно условие признака Лейбница не выполняется, то ряд расходится.

Если знакочередующийся ряд удовлетворяет условию признака Лейбница, то можно оценить ошибку, которая получится, если заменить его сумму S частичной суммой S_n. Допускаемая при этом погрешность, оценивается для знакочередующегося ряда по признаку Лейбница.

При такой замене мы отбрасываем все члены ряда, начиная с u_{n+1}. Но отбрасываемые члены образуют знакочередующийся ряд, сумма которого меньше первого члена этого ряда, т. е. меньше u_{n+1}.

Ошибка, совершаемая при замене суммы ряда S на частичную сумму S_n, равна $\delta = |r_n| = |S - S_n|$ и не превосходит по абсолютной величине первого из отброшенных членов ряда, т. е. $|r_n| < u_{n+1}$.

<u>*Решение типовых примеров*</u>

37 Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{(n+1)^2} + \ldots .$$

Вычислить приближенно его сумму, удержав три первых члена ряда, и оценить погрешность.

Решение

Проверим выполнимость условий признака Лейбница, т.к. $u_n = \dfrac{1}{(n+1)^2}$,

$$1)\ \frac{1}{4} > \frac{1}{9} > \frac{1}{16} > \ldots$$

$$2)\ \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)^2} = 0.$$

Оба условия выполняются. Следовательно, данный ряд сходится

$$S \approx S_3 = \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{16} = 0{,}2014 .$$

Ошибка δ, получающаяся при замене суммы этого ряда суммой трёх первых членов, меньше абсолютной величины четвертого члена, то есть

$\delta < |u_4|$, $\qquad \delta < \dfrac{1}{25}$ =0,04.

Ответ: $S = 0.2014 \qquad \delta < 0.04$.

38 Вычислить сумму ряда с точностью до 0,01: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{3n^2}$.

Решение

Данный ряд сходится, так как $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3n^2} = 0$, Так как $\left|r_n\right| < u_{n+1} < 0{,}01$, то найдём n

$$\left|\frac{1}{3(n+1)^2}\right| < 0.01, \qquad 3(n+1)^2 > 100,$$

$$\sqrt{3}(n+1) > 10, \qquad n+1 > \frac{10}{\sqrt{3}},$$

$$n > 5{,}7-1, \qquad n > 4{,}7.$$

Следовательно, $n = 5$.

Значит, это неравенство выполняется, начиная, с $n = 5$.

Таким образом,

$$S \approx S_5 = \frac{1}{3\cdot 1^2} - \frac{1}{3\cdot 2^2} + \frac{1}{3\cdot 3^2} - \frac{1}{3\cdot 4^2} + \frac{1}{3\cdot 5^2} =$$
$$= 0{,}333 - 0{,}083 + 0{,}037 - 0{,}021 + 0{,}013 = 0{,}279.$$

Ответ: $S = 0{,}28$.

<u>Задания для самостоятельного решения</u>

39 а) Оценить ошибку, допускаемую при замене суммы ряда

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \left(-1\right)^{n-1}\frac{1}{n} + \ldots$$

суммой четырех первых его членов. Найти эту сумму.

б) Оценить ошибку, допускаемую при замене суммы ряда

$$0{,}1 - \frac{0{,}1^2}{2} + \frac{0{,}1^3}{3} - \frac{0{,}1^4}{4} + \ldots$$

суммой трех первых его членов. Найти эту сумму.

Вычислить сумму ряда с точностью до ε

40 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\left(2n\right)^3}, \quad \varepsilon = 0{,}001;$

41 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n!}, \quad \varepsilon = 0{,}01;$

42 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{3^n}, \quad \varepsilon=0{,}1;$

43 $\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n, \quad \varepsilon=0{,}1;$

44 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^3+1}, \quad \varepsilon=0{,}01;$

45 $1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)^2}+\ldots \qquad \varepsilon=0{,}01.$

8.3. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость

Определение Ряды, члены которых имеют произвольные знаки, называются знакопеременными рядами. Пусть

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots \tag{85}$$

знакопеременный ряд.

Числа u_1, u_2, …, u_n,… могут быть как положительными, так и отрицательными, причем расположение положительных и отрицательных членов ряда произвольное.

<u>*Достаточный признак сходимости знакопеременного ряда*</u>

Если для знакопеременного ряда $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$ сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов, т. е. $|u_1|+|u_2|+\ldots+|u_n|+\ldots$, то данный знакопеременный ряд также сходится.

Определение Знакопеременный ряд $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$ называется ***абсолютно сходящимся***, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов $|u_1|+|u_2|+\ldots+|u_n|+\ldots$.

На основании достаточного признака сходимости знакопеременного ряда ***всякий абсолютно сходящийся ряд является сходящимся***.

Определение Знакопеременный ряд $u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$ называется ***условно сходящимся*** (или неабсолютно сходящимся), если он сходится, а ряд $|u_1|+|u_2|+\ldots+|u_n|+\ldots$, составленный из абсолютных величин его членов расходится.

Решение типовых примеров

Исследовать сходимость знакопеременных рядов и установить характер сходимости (абсолютная, условная)

46 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n^5}}$

Решение

Ряд знакочередующийся, поэтому применим признак Лейбница.

1) $1>\frac{1}{\sqrt[4]{2^5}}>\frac{1}{\sqrt[4]{3^5}}>\frac{1}{\sqrt[4]{4^5}}>...$ первое условие признака выполнено,

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{n^5}}=0$ второе условие признака выполнено, значит, ряд сходится.

Составим ряд из абсолютных величин данного ряда:

$$1+\frac{1}{\sqrt[4]{2^5}}+\frac{1}{\sqrt[4]{3^5}}+\frac{1}{\sqrt[4]{4^5}}+...+\frac{1}{\sqrt[4]{n^5}}+....$$

Этот ряд обобщённо гармонический и при $p=\frac{5}{4}>1$ является сходящимся.

Значит, данный ряд сходится абсолютно.

47 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{10n+1}$.

Решение

Применим признак Лейбница.

1) $\frac{1}{11}>\frac{1}{21}>\frac{1}{31}>\frac{1}{41}>...$ первое условие признака выполнено,

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{10n+1}=0$ второе условие признака выполнено, значит, ряд сходится.

Составим ряд из абсолютных величин данного ряда:

$$\frac{1}{11}+\frac{1}{21}+\frac{1}{31}+\frac{1}{41}+...+\frac{1}{10n+1}+....$$

Исследуем этот ряд с помощью интегрального признака Коши:

$$f(x)=\frac{1}{10x+1},$$

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{10x+1}=\frac{1}{10}\int_1^{\infty}\frac{d(10x+1)}{10x+1}=\frac{1}{10}ln(10x+1)\Big|_1^{\infty}=\infty.$$

Интеграл расходится, поэтому и ряд расходится.

Значит, данный ряд сходится условно.

48 $1{,}1-1{,}01+1{,}001-...+(-1)^{n-1}\left[1+(0{,}1)^n\right]+....$

Решение

Применим признак Лейбница.

1) $1{,}1 > 1{,}01 > 1{,}001 > \ldots$ первое условие признака выполнено,

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{10^n}) = 1$ второе условие признака не выполняется. Значит, ряд расходится.

Задания для самостоятельного решения

Выяснить, какие ряды сходятся абсолютно, какие сходятся условно, какие расходятся

49 $-\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{2^2}-\dfrac{7}{2^3}+\ldots+(-1)^n\dfrac{2n+1}{2^n}+\ldots;$

50 $-\dfrac{1}{4^2}+\dfrac{1}{7^2}-\dfrac{1}{10^2}+\ldots+(-1)^n\dfrac{1}{(3n+1)^2}+\ldots;$

51 $-\dfrac{1}{\ln 2}+\dfrac{1}{\ln 3}-\dfrac{1}{\ln 4}+\ldots+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{\ln(n+1)}+\ldots;$

52 $-1+\dfrac{2^2}{2!}-\dfrac{3^3}{3!}+\dfrac{4^4}{4!}+\ldots+(-1)^n\dfrac{n^n}{n!}+\ldots;$

53 $1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}}-\dfrac{1}{\sqrt{7}}+\ldots+(-1)^{n+1}\dfrac{1}{\sqrt{2n-1}}+\ldots;$

54 $\dfrac{1}{1!}-\dfrac{2^2}{2!}+\dfrac{3^2}{3!}-\dfrac{4^2}{4!}+\ldots+(-1)^{n+1}\dfrac{n^2}{n!}+\ldots;$

55 $\dfrac{1}{2\ln 2}-\dfrac{1}{3\ln 3}+\dfrac{1}{4\ln 4}+\ldots+(-1)^{n+1}\dfrac{1}{(n+1)\ln(n+1)}+\ldots;$

56 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \ln n}{n}$;

57 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n-1)^2}{n^2+1}$;

58 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$;

59 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n$;

60 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 5^n}$.

8.4. Функциональные ряды

Определение Ряд, членами которого являются функции от *x,* называется функциональным:

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots \qquad (86)$$

Совокупность тех значений x, при которых функциональный ряд сходится, называется ***областью сходимости*** этого ряда. Областью сходимости функционального ряда чаще всего служит какой-нибудь промежуток оси *Ox*.

Частичная сумма функционального ряда, т. е. сумма первых n его членов, является функцией переменной x:

$$S_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x) \qquad (87)$$

В любой точке x из области сходимости функционального ряда (86) существует предел частичной суммы (87) при $n\to\infty$. В точках, не принадлежащих области сходимости функционального ряда частичная сумма $S_n(x)$ не имеет предела. Сумма функционального ряда является некоторой функцией от x, определенной в области сходимости ряда:

$$S(x)=\lim_{n\to\infty} S_n(x),\ \ \forall x\in D \qquad (88)$$

Разность $R_n(x)=S(x)-S_n(x)$ называется остатком функционального ряда.

Определение Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется равномерно сходящимся в области *D*, к функции $S(x)$, если для любого $\varepsilon>0$ найдётся такое число *N*, что для всех *n*>*N* и для всех $x\in D$ справедливо неравенство

$$\left|\sum_{k=1}^{n} u_k(x)-S(x)\right|<\varepsilon \text{ или } \left|R_n(x)\right|=\left|S_n(x)-S(x)\right|<\varepsilon .$$

Признак Вейерштрасса

(достаточный признак равномерной сходимости)

Если для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на отрезке $[a,\ b]$ существует сходящийся знакоположительный числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$, удовлетворяющий условию

$$\left|u_n(x)\right|\le C_n \quad (n=1,2,...),$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится на отрезке $[a,b]$ равномерно.

<u>*Решение типовых примеров*</u>

61 Найти область сходимости рядов $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{x^n}$.

Решение

По радикальному признаку Коши имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\sqrt[n]{\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{x^n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}}{x}\right|=\left|\frac{1}{x}\right|\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}=\left|\frac{e}{x}\right|.$$

Ряд будет сходиться при $\left|\frac{e}{x}\right|<1$, следовательно, $\frac{e^2}{x^2}-1<0$, $\frac{e^2-x^2}{x^2}<0$, так как $x^2>0$, то $e^2-x^2<0$. Ряд сходится при $x\in(-\infty;-e)\cup(e;+\infty)$.

62 Исследовать на равномерную сходимость

$$\sin x+\frac{1}{2^2}\sin^2 2x+\frac{1}{3^2}\sin^3 3x+...+\frac{1}{n^2}\sin^n nx+... .$$

Решение

Область определения $(-\infty;+\infty)$. Сравним данный ряд с числовым знакоположительным рядом $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}+...$ - это обобщённый гармонический ряд, при $p=2>1$ он сходится. Так как $\left|\frac{sin^n nx}{n^2}\right|\le\frac{1}{n^2}$, то по признаку Вейерштрасса данный ряд равномерно сходится на всей оси Ox.

Задания для самостоятельного решения

Найти область сходимости рядов

63 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{lg\,x}}$;

64 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}ne^{nx}$;

65 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{\left(1+x^2\right)^n}$;

66 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{cosnx}{n\sqrt{n}}$;

67 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{x^n}$;

68 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{nx}}$;

69 $\sum_{n=1}^{\infty}ln^n\left(1+x^2\right)$;

70 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{x^n}$;

71 $\sum_{n=1}^{\infty}x^n\,tg\,\frac{x}{2^n}$.

Исследовать на равномерную сходимость.

72 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{cosnx}{n^2}$;

73 $\frac{sin\,x}{1!}+\frac{sin\,2x}{2!}+...+\frac{sin\,nx}{n!}+...$;

74 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-n^2x^2}}{n^2}$;

75 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sin\,nx}{2^n}$;

76 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sin\,nx}{n^2+\left(4-x^2\right)^{n/2}}$;

77 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\,ln^2 n+\left(4-x^2\right)^{\frac{n}{2}}}$.

8.5. *Степенные ряды*

Определение Степенным рядом называется ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \tag{89}$$

Числа a_0, a_1, …, a_n, … называются коэффициентами степенного ряда, $x \in R$. Ряд (89) разложен по степеням x. Рассматриваются также степенные ряды, разложенные по степеням $(x - x_0)$, то есть ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \ldots + a_n (x - x_0)^n + \ldots, \tag{90}$$

где x_0 - некоторое постоянное число.

Ряд (90) легко приводится к виду (89), если положить $x - x_0 = z$. Поэтому при изучении степенных рядов можем ограничиться степенными рядами вида (89).

Основное свойство степенных рядов:

Теорема Абеля

Если степенной ряд (89) сходится при $x = x_0 \neq 0$, то он сходится и притом абсолютно для всех x, удовлетворяющих условию $|x| < |x_0|$. Если ряд (89) расходится при $x = x_1$, то он расходится при всех x, удовлетворяющих условию $|x| > |x_1|$.

Из теоремы Абеля следует, что $x_0 \neq 0$ есть точка сходимости степенного ряда, то интервал $(-|x_0|;|x_0|)$ весь состоит из точек сходимости степенного ряда и называется ***интервалом сходимости степенного*** ряда. Положив $|x_0| = R$, интервал сходимости можно записать в виде $(-R; R)$. Число R называют ***радиусом сходимости*** степенного ряда, то есть R>0 - это такое число, что при всех x, для которых $|x| < R$, ряд (89) абсолютно сходится, а при $|x| > R$ ряд расходится.

В частности, когда ряд (89) сходится лишь в одной точке $x_0 = 0$, то считаем, что $R = 0$. Если же ряд (89) сходится во всех точках числовой оси $(-\infty; +\infty)$, то в этом случае $R = \infty$.

Отметим, что на концах интервала сходимости (то есть при $x = -R$ и при $x = +R$) сходимость ряда проверяется отдельно.

Радиус сходимости степенного ряда (89) находим используя признаки сходимости Даламбера и Коши по формулам:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} x}{a_n} < 1; \text{ откуда } \quad R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \tag{91}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n x^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}\, x < 1; \text{ откуда } \quad R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}. \tag{92}$$

Замечания

1.Интервал сходимости степенного ряда (90) находят из неравенства $|x-x_0|<R$ и он имеет вид $(x_0-R; x_0+R)$.

2. Если степенной ряд содержит не все степени x, т.е. задан неполный степенной ряд, то интервал сходимости ряда находят без определения радиуса сходимости, а *непосредственно применяют признак Даламбера (или признак Коши)* для ряда, составленного из модулей членов данного ряда.

Свойства степенных рядов

1. Сумма $S(x)$ степенного ряда (89) является непрерывной функцией в интервале сходимости $(-R;R)$.

2. Если радиус сходимости ряда отличен от нуля, то степенной ряд можно почленно дифференцировать и интегрировать любое число раз внутри интервала сходимости. При этом интервал сходимости не изменяется.

3. Внутри интервала сходимости ряды можно складывать, вычитать, умножать, делить, умножать на число. Интервал сходимости должен быть одинаковым.

Решение типовых примеров

78 Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n 3^n}{n!}$.

Решение

Воспользуемся формулой (91) $a_n=\frac{3^n}{n!}$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^n}{n!}\cdot\frac{(n+1)!}{3^{n+1}}\right|=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty$$

Следовательно, ряд сходится на всей числовой оси.

79 Найти область сходимости степенного ряда

$$x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\ldots.$$

Решение

Заданный ряд не полный. Воспользуемся признаком Даламбера.

$$|u_n|=\left|\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right|,\qquad |u_{n+1}|=\left|\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right|,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\cdot\frac{2n-1}{x^{2n-1}}\right|=\left|x^2\right|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1}=x^2.$$

Ряд абсолютно сходится, если $x^2<1$ или $-1<x<1$. Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости.

При $x=-1$, $\quad -1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\ldots$, сходится по признаку Лейбница.

При $x=1$, $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$, тоже сходится по признаку Лейбница.

Следовательно, областью сходимости является отрезок $\left[-1;1\right]$.

80 Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n\cdot 3^{n-1}}$.

Решение

Находим радиус сходимости ряда по формуле (91)

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n\cdot 3^{n-1}}:\frac{1}{(n+1)\cdot 3^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)3^n}{n\cdot 3^{n-1}}=3.$$

Следовательно, ряд сходится при $-3<x-3<3$, то есть при $0<x<6$.

При $x=0$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-3\right)^n}{n}=3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{n}$. Сходится по признаку Лейбница.

При $x=6$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n}=3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Это гармонический ряд – расходится.

Следовательно, областью сходимости является интервал $\left[0;6\right)$.

Задания для самостоятельного решения

Найти область сходимости степенных рядов

81 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n-1}nx^n$;

82 $1+\frac{x}{3\cdot 2}+\frac{x^2}{3^2\cdot 3}+\frac{x^3}{3^3\cdot 4}+\ldots$;

83 $1+\frac{2x}{3^2\sqrt{3}}+\frac{4x^2}{5^2\sqrt{3^2}}+\frac{8x^3}{7^2\sqrt{3^3}}+\ldots$;

84 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$;

85 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^{n-1}}{n}$;

86 $1+3x+...+(n-1)3^{n-1}x^{n-1}+...$;

87 $x-\frac{x^3}{3\cdot 3!}+...+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!}+...$;

88 $x+\frac{x^2}{20}+...+\frac{x^n}{n\cdot 10^{n-1}}+...$;

89 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n2^n}(x+2)^n$;

90 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-2)^n}{n^n}$;

91 $(x+1)+\frac{(x+1)^2}{2\cdot 4}+\frac{(x+1)^3}{3\cdot 4^2}+\frac{(x+1)^4}{4\cdot 4^3}+...$;

92 $(x-4)+\frac{(x-4)^2}{\sqrt{2}}+\frac{(x-4)^3}{\sqrt{3}}+\frac{(x-4)^4}{\sqrt{4}}+...$;

93 $\frac{x-1}{2}+\frac{(x-1)^2}{2^2}+\frac{(x-1)^3}{2^3}+....$

8.6. *Ряды Тейлора и Маклорена*

Для приложений важно уметь данную функцию $f(x)$ разлагать в степенной ряд, т. е. функцию $f(x)$ представлять в виде суммы степенного ряда.

Если функцию $f(x)$ - любая функция, имеющая в некоторой окрестности точки x_0 производные $(n+1)$-го порядка включительно, справедлива формула Тейлора:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x). \qquad (93)$$

где $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad c\in(x;x_0)$ - остаточный член в форме Лагранжа.

Если для некоторого значения x $R_n(x)\to 0, \quad n\to\infty$, то в пределе формула Тейлора преобразуется для этого значения x в ряд Тейлора:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots. \qquad (94)$$

Если в ряде Тейлора положить $x_0=0$, то получим ряд Маклорена:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots \qquad (95)$$

Этот ряд называется рядом Маклорена функции $f(x)$.

Достаточный признак разложимости функции в ряд Тейлора

Если в некотором интервале, содержащем точку x_0, при любом n выполняется неравенство $\left|f^{(n)}(x)\right|<M$, где M - положительная постоянная, то $\lim\limits_{n\to\infty}R_n=0$ и функция разложима в ряд Тейлора.

<u>*Разложения в ряд Маклорена типовых функций:*</u>

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots \qquad x\in(-\infty;\infty) \qquad (96)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots \qquad x\in(-\infty;\infty) \qquad (97)$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}+\ldots \qquad x\in(-\infty;\infty) \qquad (98)$$

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots=\sum_n C_m^n x^n$$

$$x \in \begin{cases} [-1;1], m \geq 0 \\ (-1;1], -1 < m < 0 \\ (-1;1), m \leq -1 \end{cases} \qquad (99)$$

При целых положительных m получается конечный многочлен, иначе - бесконечный.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots \qquad x \in (-1;1) \qquad (100)$$

$$ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \ldots \qquad x \in (-1;1] \qquad (101)$$

$$arctg\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots \qquad x \in [-1;1] \qquad (102)$$

$$arcsin\, x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7} + \ldots +$$

$$+ \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots, \quad x \in [-1;1] \qquad (103)$$

Ряды (101)-(103) получены через интегральное представление соответствующих функций с использованием (99).

Решение типовых примеров

94 Разложить в ряд по степеням x функцию $f(x) = 2^x$.

Решение

Найдём значения функции и её производных при $x = 0$:

$$f(x) = 2^x, \qquad f(0) = 1,$$
$$f'(x) = 2^x\, ln 2, \qquad f'(0) = ln 2,$$
$$f''(x) = 2^x\, ln^2 2, \qquad f''(0) = ln^2 2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$f^{(n)}(x) = 2^x\, ln^n 2, \qquad f^{(n)}(0) = ln^n 2,$$

Так как $0 < ln 2 < 1$, то при фиксированном *x* имеет место неравенство $\left| f^{(n)}(x) \right| < 2^x$ для любого *n*. Следовательно, функция может быть представлена в виде суммы ряда Маклорена:

$$2^x = 1 + x\, ln 2 + \frac{x^2\, ln^2 2}{2!} + \frac{x^3\, ln^3 2}{3!} + \ldots \qquad x \in (-\infty; \infty)$$

Это решение можно получить иначе: достаточно в разложении (96) заменить *x* на $x\, ln 2$, так как $2^x = e^{ln 2^x} = e^{x\, ln 2}$.

95 Разложить в ряд по степеням x функцию $f(x) = \frac{2}{3-x}$.

Решение

Воспользуемся формулой (100). Так как

$$f(x)=\frac{2}{3-x}=\frac{2}{3(1-\frac{x}{3})}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{3}},$$

то заменив x на $\frac{x}{3}$ получим:

$$\frac{2}{3-x}=\frac{2}{3}\cdot\left(1+\frac{x}{3}+\left(\frac{x}{3}\right)^2+\left(\frac{x}{3}\right)^3+\ldots\right),$$

или

$$\frac{2}{3-x}=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{x}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{x^2}{3^2}+\ldots+\frac{2}{3}\cdot\frac{x^n}{3^n}+\ldots,$$

где $-1<\frac{x}{3}<1$, то есть $-3<x<3$.

96 Разложить в ряд по степеням x функцию $f(x)=cos^2 x$.

Решение

$f(x)=cos^2 x=\frac{1}{2}(1+cos\,2x)$, поэтому достаточно разложить в ряд функцию $cos\,2x$, заменив в формуле (98) x на $2x$:

$$cos\,2x=1-\frac{2^2x^2}{2!}+\frac{2^4x^4}{4!}-\frac{2^6x^6}{6!}+\ldots, \qquad x\in(-\infty;\infty).$$

Это разложение справедливо, как и в случае $cos\,x$, для всех x.

В итоге получим:

$$cos^2 x=\frac{1}{2}\left(1+1-\frac{2^2x^2}{2!}+\frac{2^4x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{2^{2n}x^{2n}}{(2n)!}+\ldots\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(2-\frac{2^2x^2}{2!}+\frac{2^4x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{2^{2n}x^{2n}}{(2n)!}+\ldots\right)=$$

$$=1-\frac{2x^2}{2!}+\frac{2^3x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}+\ldots$$

97 Разложить в ряд по степеням x функцию $f(x)=e^{-x}\,sin\,x$.

Решение

Ряд для функции e^{-x} получается из ряда для функции e^x заменой x на $-x$ и абсолютно сходится на всей числовой прямой. Ряд для функции $sin\,x$ также абсолютно сходится на всей числовой прямой. Поэтому, чтобы получить разложение функции $f(x)=e^{-x}\,sin\,x$ в ряд, достаточно перемножить абсолютно сходящиеся ряды для функций e^{-x} и $sin\,x$.

$$e^{-x}\,sin\,x=\left(1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots\right)\cdot\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots\right)=x-x^2+\frac{1}{6}x^3-\frac{3}{40}x^5+\ldots$$

Полученный ряд, по свойству сходящихся рядов, сходится на всей числовой прямой к функции $f(x)=e^{-x}\,sin\,x$.

Задания для самостоятельного решения

98 Разложить функцию ряд Тейлора $f(x)=\frac{1}{x}$ по степеням (x+2).

Разложить функцию ряд Тейлора, взяв три члена разложения

99 $f(x)=\sin x$ по степеням $\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$.

100 $f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{4-5x}}$ по степеням x.

101 $f(x)=2x\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-x$ по степеням x.

102 $f(x)=\frac{2x}{x^2-3x+2}$ по степеням x.

103 $f(x)=\ln(1-x-6x^2)$ по степеням x.

104 Разложить функцию $y=\ln x$ в ряд Тейлора в окрестности точки x=1 (при x_0=1).

105 Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)=(1+x)^4$.

106 Разложить функцию $y = sin\frac{x}{2}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x = 0$

8.7. Некоторые приложения степенных рядов

<u>*Вычисление значений функций*</u>

Пусть требуется вычислить значение функции $f(x)$ при $x = x_1$ с заданной точностью. Предположим, что эту функцию можно разложить в степенной ряд: $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + ... + a_n(x - x_0)^n + ...$ на интервале $(-R;R)$ и $x_1 \in (-R;R)$.

Тогда $f(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) + ... + a_n(x_1 - x_0)^n + ...$. Взяв достаточное число первых членов ряда, получим

$$f(x_1) = S_n\left(x_1\right) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) + ... + a_n(x_1 - x_0)^n$$

Абсолютная погрешность этого приближенного равенства, то есть $\left|f(x_1) - S_n(x_1)\right|$ равно модулю остатка ряда $\Delta = \left|f(x_1) - S_n(x_1)\right| = \left|r_n(x_1)\right|$, где $r_n(x_1) = a_{n+1}(x_1 - x_0)^{n+1} + a_{n+2}(x_1 - x_0)^{n+2} + ...$ Чтобы вычислить значение $f(x_1)$ с точностью $\varepsilon > 0$, нужно взять сумму такого числа n первых членов ряда, чтобы $\left|f(x_1) - S_n(x_1)\right| = \left|r_n(x_1)\right| \le \varepsilon$.

Оценить погрешность можно с помощью остаточного члена ряда Тейлора. Если функция $f(x)$ разложена в степенной ряд, то этот ряд является ее рядом Тейлора (или Маклорена). В этом случае

$$\left|f(x_1) - S_n(x_1)\right| = \left|R_n(x_1)\right| = \left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x_1 - x_0)^{n+1}\right|,$$

где $c = x_0 + \theta(x_1 - x_0),\ 0 < \theta < 1$.

В зависимости от конкретного случая применяется тот или иной метод оценки остатка ряда (или оценки погрешности).

<u>*Решение типовых примеров*</u>

107 Вычислить с точностью до 0,001 число e

Решение

Запишем ряд Маклорена для e^x:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...$$

При $x = 1$ получим

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!} + ...$$

Запишем приближенное равенство

$$e^x \approx 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...+\frac{1}{n!}.$$

Оценим погрешность приближения с помощью остаточного члена ряда Маклорена.

Так как $f^{(n+1)}(x)=e^x$, то $R_n(x)=\frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}$, где $c=\theta x$, $0<\theta<1$.

При $x=1$ $R_n(1)=\frac{e^\theta}{(n+1)!}$, $0<\theta<1$.

Учитывая, что $e^\theta<e<3$, получим $R_n(1)<\frac{3}{(n+1)!}$.

При $n=5$ $\frac{3}{(5+1)!}=\frac{1}{240}>0.001$.

При $n=6$ $\frac{3}{7!}=\frac{1}{1680}<0.001$.

Поэтому для достижения требуемой точности достаточно взять $n=6$.

Итак,

$$e \approx 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}=$$

$$=1.0000+1.0000+0.5000+0.1667+0.0417+0.0083+0.0014=2.7181.$$

Следовательно, $e\approx 2.7181$ с точностью до 0,001.

108 Вычислить $sin18^o$ с точностью до 0,0001.

Решение

$$sin18^o = sin\frac{\pi}{10}-\frac{\pi^3}{3!10^3}+\frac{\pi^5}{5!10^5}-....$$

Полученный ряд знакочередующийся, члены которого убывают по абсолютной величине. Поэтому его остаток не превосходит первого отброшенного члена ряда.

Так как $\frac{\pi^3}{3!10^3}>0.0001$, а $\frac{\pi^5}{5!10^5}<0.0001$, то с точностью до 0,0001 получим

$sin18^o \approx \frac{\pi}{10}-\frac{\pi^3}{3!10^3}=\frac{(3.14159)}{10}-\frac{(3.14159)^3}{3!10^3}=0.314159-0.00517=0.30899.$ Итак, $sin18^o\approx 0.3090$.

Вычисление определенных интегралов

Сущность метода поясним на конкретном примере

109 Вычислить $\int_0^{\frac{1}{3}} e^{-x^2}dx$ с точностью до 0,001.

Решение

Так как $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}+...$, то положив $x=-x^2$, получим

$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots$ этот ряд сходится при $x \in (-\infty; +\infty)$ значит, его можно почленно интегрировать на любом отрезке и, в частности, на отрезке $\left[0; \frac{1}{3}\right]$:

$$\int_0^{\frac{1}{3}} e^{-x^2} dx = \int_0^{\frac{1}{3}} (1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots) dx = x\Big|_0^{\frac{1}{3}} - \frac{x^3}{3}\Big|_0^{\frac{1}{3}} + \frac{x^5}{5 \cdot 2}\Big|_0^{\frac{1}{3}} - \frac{x^7}{7 \cdot 6}\Big|_0^{\frac{1}{3}} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 2 \cdot 3^5} - \frac{1}{7 \cdot 6 \cdot 3^7} + \ldots$$

Искомый интеграл представлен знакочередующимся рядом. Так как $\frac{1}{5 \cdot 2 \cdot 3^5} = \frac{1}{2430} < 0.001$, то с точностью до 0,001 имеем

$$\int_0^{\frac{1}{3}} e^{-x^2} dx \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 3^3} = 0.3333 - 0.0123 = 0.3210$$

Итак $\int_0^{\frac{1}{3}} e^{-x^2} dx \approx 0.321$.

Применение рядов к решению дифференциальных уравнений

Пусть требуется найти решение уравнения

$$y'' = F(x, y, y'), \tag{104}$$

удовлетворяющее начальным условиям при $x = x_0$, $y = y_0$, $y' = y'_0$.

Допустим, что решение $y = f(x)$ и его можно представить рядом

$$y = f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots .$$

Нужно найти $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, …, то есть значения производных от частного решения при $x = x_0$.

Из начального условия следует, что $f(x_0) = y_0$, $f'(x_0) = y'_0$. Из уравнения (104) получаем

$$y''_0 = f''(x_0) = F(x_0, y_0, y'_0).$$

Дифференцируя обе части уравнения (104) по x, получим

$$y''' = F'_x(x, y, y') + F'_y(x, y, y')y' + F'_{y'}(x, y, y')y'' .$$

Подставляя в это равенство $x = x_0$, найдём

$$y'''_0 = f'''(x_0) = y'''(x_0).$$

Дифференцируя y''' еще раз по x, найдем $f^{IV}(x_0) = y^{IV}(x_0)$ и т. д. Найденные значения производных подставим в ряд Тейлора решения $y = f(x)$. Для тех значений x, при которых этот ряд сходится, он представляет решение уравнения.

Решение типовых примеров

110 Найти первые три члена разложения в степенной ряд частного решения уравнения $y'' = y\cos x + x$, удовлетворяющего начальным условиям: $y(0)=1, y'(0)=0$.

Решение

Ищем решение уравнения в виде ряда Маклорена (т. к. $x_0 = 0$)

$$y = y(0) + y'(0) + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \dots .$$

Учитывая, что при $x=0$, $y=1$ находим $y''(0) = 1\cos 0 + 0 = 1$.

Для нахождения y''' дифференцируем обе части данного уравнения $y''' = y'\cos x - y\sin x + 1$.

При $x=0$ получим $y'''(0) = y'(0)\cos 0 + y(0)\sin 0 + 1 = 0\cdot 1 + 1\cdot 0 + 1 = 1$

Подставляя значения $y(0)$, $y'(0), y''(0)$, $y'''(0)$ в ряд для частного решения $y(x)$, получим приближенное выражение частного решения в виде частичной суммы ряда $y(x) \approx 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$.

Если дифференциальное уравнение линейное, то удобнее искать частное решение в виде степенного ряда $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$ или $y = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots$.

Для нахождения коэффициентов $a_0, a_1, \dots, a_n$ решение в виде степенного ряда подставляют в уравнение и приравнивают коэффициенты, стоящие при одинаковых степенях x в левой и правой частях уравнения.

111 $\begin{cases} y'' = 2xy' + 4y \\ y(0) = 0, y'(0) = 1 \end{cases}$

Решение

$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n + \dots$

$y(0) = a_0 = 0$ $\qquad y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots$

$y'(0) = a_1 = 1$

Следовательно, $y = x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n + \dots$

$y' = 1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1} + \dots$

$y'' = 2a_2 + 2\cdot 3a_3x + \dots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \dots$

Подставляем y, y', y'' в уравнение, получим

$2a_2 + 2\cdot 3a_3x + \dots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \dots =$

$= 2x(1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1} + \dots) + 4(x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n + \dots),$

откуда

$2a_2 = 0$ $\qquad a_2 = 0$

$3\cdot 2a_3 = 2 + 4$ $\qquad a_3 = 1$

$4\cdot 3a_4 = 4a_2 + 4a_2$ $a_4 = 0$

–––––––––––––––––––

$$n(n-1)a_n=(n-2)\cdot 2a_{n-2}+4a_{n-2} \qquad a_n=\frac{2a_{n-2}}{n-1}$$

Следовательно,

$$a_4=0; \qquad a_5=\frac{2\cdot 1}{4}=\frac{1}{2!}; \qquad a_6=0; \qquad a_7=\frac{2\cdot\frac{1}{2}}{6}=\frac{1}{3!}; \qquad a_9=\frac{1}{4!};$$

$$a_{2k}=0; \qquad a_{2k+1}=\frac{2\cdot\frac{1}{(k-1)!}}{2k}=\frac{1}{k!}.$$

Подставляя найденные значения коэффициентов и искомое частное решение, получим

$$y=x+\frac{x^3}{1!}+\frac{x^5}{2!}+\frac{x^7}{3!}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{n!}+\ldots$$

$$y=x\left(1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{n!}+\ldots\right)$$

$$y=xe^{x^2}.$$

Задания для самостоятельного решения

112 Вычислить $cos10^0$ ограничившись двумя членами ряда, оценить погрешность.

113 Вычислить:

а) $\sqrt[4]{90}$ с точностью до 10^{-4}; б) $\sqrt[4]{630}$ с точностью $\varepsilon=10^{-4}$;

в) $sin9^0$ с точностью до 10^{-4}; г) $\sqrt[5]{34}$ с точностью до 10^{-4}.

114 Вычислить $ln1,2$.

115 Вычислить $e^{-0,2}$ с точностью $\varepsilon=0,0001$.

116 Ограничиваясь первыми тремя членами разложения вычислить

а) $\int_0^1 \frac{sin\,x}{x}dx$; б) $\int_0^{0,5}\frac{e^x-1}{x}dx$; в) $\int_0^{0,4} e^{-\frac{x^2}{4}}dx$.

117 Вычислить:

а) $\int\limits_0^{0,1} \frac{ln(1+x)}{x}dx$ с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$;

б) $\int\limits_0^{0,5} \frac{1-cos\,x}{x^2}dx$ с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$.

118 С помощью разложения в ряд по степеням x проинтегрировать уравнения: $y' = x - 2y, \quad y(0) = 0.$

119 Методом последовательного дифференцирования найти первых три члена (отличных от нуля) разложения в ряд решения уравнения

$$y'' = xy' - y + e^x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0,$$

120 Найти решение уравнения $y'' + y'x + y = x\cos x, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$, используя метод неопределённых коэффициентов.

8.8. ОТВЕТЫ (РЯДЫ)

11 а) $\frac{1}{2}+\frac{4}{5}+\frac{7}{10}+\frac{10}{17}+\ldots$; б) $\frac{3}{2^2\cdot 3^2}+\frac{5}{3^2\cdot 4^2}+\frac{7}{4^2\cdot 5^2}+\frac{9}{5^2\cdot 6^2}+\ldots$;

в) $\frac{1}{e}+\frac{8}{e^2}+\frac{27}{e^3}+\frac{64}{e^4}+\ldots$; г) $1+\frac{1}{3\cdot 3}+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{7\cdot 27}+\ldots$;

д) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 9}+\ldots$; е) $1+\frac{4}{2}+\frac{9}{6}+\frac{16}{24}+\frac{25}{120}+\ldots$.

12 а) $U_n=\frac{1}{2n-1}$; б) $U_n=\frac{1}{2n}$; в) $U_n=\frac{n}{2^{n-1}}$; г) $U_n=\frac{1}{n(n+1)}$; д) $U_n=\frac{1}{n^2}$;

е) $U_n=\frac{n+2}{(n+1)^2}$; ж) $U_n=\frac{2n}{3n+2}$; з) $U_n=\frac{1}{2^n+3}$; и) $U_n=\frac{1}{n!}$;

13 а) $\{1\}$ - нет; б) $\{0\}$ - да; в) $\{1\}$ - нет; г) $\{1\}$ -нет; д) $\{0\}$ - да;

е) $\{0\}$ - да; ж) $\{0\}$ - да; з) $\{1\}$ - нет.

14 а) $S=\frac{1}{2}$, сходится; б) $S=\frac{3}{2}$, сходится; в) $S=1$, сходится;

г) $S=\frac{1}{2}$, сходится.

15 а) сходится; б) расходится; в) расходится; г) расходится; д) сходится.
16 а) сходится; б) сходится; в) сходится; г) расходится; д) расходится.
17 а) сходится; б) сходится; в) сходится; г) сходится; д) расходится.
18 а) расходится; б)расходится; в) сходится; г) расходится; д) сходится.
19 Сходится. **20** Сходится. **21** Расходится. **22** Расходится.
23 Сходится. **24** Сходится. **25** Расходится. **26** Сходится.
27 Сходится. **28** Расходится. **29** Сходится. **30** Расходится.
31 Сходится. **32** Сходится. **33** Расходится. **34** Сходится.
35 Расходится. **36** Сходится.
39 а) $r_n<0{,}2$, $S=0{,}58$; б) $r_n<0{,}000025$, $S=0{,}0953$.
40 $n=4$, $S=0{,}112$; **41** $n=4$, $S=0{,}62$; **42** $n=6$, $S=0{,}1$.
43 $n=6$, $S=0{,}5$; **44** $n=4$, $S=0{,}41$; **45** $n=5$, $S=0{,}92$.
49 сходится абсолютно. **50** сходится абсолютно. **51** сходится условно.
52 расходится. **53** сходится условно. **54** сходится абсолютно.
55 сходится условно. **56** сходится условно. **57** расходится.
58 расходится. **59** сходится абсолютно. **60** сходится абсолютно.
63 $x\in(10;+\infty)$. **64** $x\in(-\infty;0)$. **65** $x\in(-\infty;+\infty)$. **66** $x\in(-\infty;+\infty)$.
67 $x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$. **68** $x\in(0;+\infty)$. **69** $x\in\left(-\sqrt{e-1};\sqrt{e-1}\right)$.

70 Всюду расходится. **71** $x\in(-2;2)$. **72** Сходится равномерно на всей числовой оси. **73** Сходится равномерно на всей числовой оси.

74 Сходится равномерно на всей числовой оси. **75** Сходится равномерно на всей числовой оси. **76** Сходится равномерно на $[-2;2]$. **77** Сходится равномерно на $[-2;2]$.

81 $x\in(-1;1)$. **82** $x\in(-3;3)$. **83** $x\in\left[-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$. **84** $x=0$.

85 $x\in(-1;1]$. **86** $x\in\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$. **87** $x\in(-\infty;+\infty)$. **88** $x\in[-10;10)$

89 $x\in(-4;0]$. **90** $x\in(-\infty;+\infty)$. **91** $x\in[-5;3)$. **92** $x\in[3;5)$.

93 $x\in(-1;3)$. **98** $-\frac{1}{2}\left(1+\frac{x+2}{2}+\frac{(x+2)^2}{2^2}+\frac{(x+2)^3}{2^3}+\ldots+\frac{(x+2)^n}{2^n}+\ldots\right)$.

99 $1-\frac{1}{2!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2+\frac{1}{4!}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^4-\ldots$. **100** $\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{16}x^3+\frac{75}{256}x^4+\ldots$.

101 $x-\frac{x^3}{2!}+\frac{x^5}{4!}-\frac{x^7}{6!}+\ldots$. **102** $\left(1-\frac{3}{2}\right)+\left(1-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)+\left(1-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2^2}\right)+\ldots$.

103 $-x-\frac{13}{2}x^2-\frac{19}{3}x^3-\ldots$.

104 $(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}+\mathrm{L}\ +(-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n}+\mathrm{L}$.

105 $1+4x+6x^2+4x^3+x^4$.

112 0,9848. **113** а) 3,0801, б)5,01, в)0,1564, г) 2,0244. **114** 0,1823.

115 0,8186. **116** а) 0,948; б) 0,569; в) 0,3897. **117** а) 0,098, б) 0,2483.

118 $y(x)=\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\ldots$. **119** $y(x)=1+\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{24}x^4+\ldots$.

120 $y(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Контрольная работа по ДУ (типовые варианты)

Вариант №1

1) $(x+xy^2)dx+(y-x^2y)dy=0$ 2) $xy'-y=\sqrt{x^2+y^2}$

3) $xdx+ydy=(x^2+y^2)dx$ 4) $y'+2xy=xe^{-x^2}$, $y(0)=2.$

5) $yy'ctgx-\sin x(1-y^2)=0$ 6) $y^{(5)}-\dfrac{1}{x}y^{(4)}=0$

7) $yy''-(y')^2=y'$ 8) $y'''+y''-y'-y=xe^x-\sin x$

9) $y''+y=\dfrac{1}{\sin x}$ 10) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=4x-y\\ \dfrac{dy}{dt}=x+2y\end{cases}$, $x(0)=-1,\ y(0)=0.$

Вариант №2

1) $y'tgx=y^2-3y+2$ 2) $(x+y)dx+(y-x)dy=0$

3) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dx+\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dy=0$ 4) $y\sin x+y'\cos x=1$

5) $xy(xy^2+1)dy-dx=0$ 6) $y''+(y')^2=x(y')^2$

7) $(1+x^2)y''+(y')^2+1=0$ 8) $y'''-2y''+y'=2e^x+\cos 3x$

9) $y''+25y=ctg5x$ 10) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=6x-y\\ \dfrac{dy}{dt}=3x+2y\end{cases}$, $x(0)=1,\ y(0)=-1.$

Вариант №3

1) $y'=e^{x-y}$ 2) $xy'=y\ln\dfrac{y}{x}$

3) $(2x\cos y-y^2\sin x)dx+(2y\cos x-x^2\sin y)dy=0$

4) $y'-yctgx=2x\sin x$ 5) $xdy+ydx=y^2dx$

6) $y''=\dfrac{y'}{x}+\dfrac{x^2}{y'}$ 7) $\dfrac{1}{2}y''=e^{4y}$

8) $y^{(4)}-2y''+y=3e^{2x}+4\sin x$

9) $y''-2y'+y=e^x\ln x$ 10) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2x-9y\\ \dfrac{dy}{dt}=x+8y\end{cases}$, $x(0)=-2,\ y(0)=-1.$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Контрольная работа по рядам (типовой вариант)

Вариант **

1. Пользуясь необходимым признаком сходимости числовых рядов, выяснить, является ли ряд заведомо расходящимся

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2+3n+1}{8n^2-2n+3}.$$

2. Исследовать на сходимость следующие ряды, используя указанные признаки сходимости

а) Признак Даламбера $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^{10}};$

б) Признак Коши $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n};$

в) Признак сравнения $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)^2};$

г) Интегральный признак $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2-1}.$

3. Исследовать на сходимость (абсолютную или условную) ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(3n-2)}.$$

4. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2(x-3)^n}{(n+1)^2}.$$

5. Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 следующую функцию, написав первые шесть членов ряда

$$f(x)=\frac{1}{x}, \quad x_0=-2.$$

6. Вычислить заданный интеграл с заданной точностью

$$\alpha=0{,}001 \qquad \int_0^1 cos\sqrt{x}dx.$$

7. Решить дифференциальное уравнение с помощью рядов:

$$y'=x+y^2, \quad y(0)=1.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 3. ТАБЛИЦА ИНТЕГРАЛОВ

1. $\int u^a du = \frac{u^{a+1}}{a+1} + C \quad (a \neq -1) \quad \left(\int du = u + C\right);$

2. $\int \frac{du}{u} = ln|u| + C;$

3. $\int a^u du = \frac{a^u}{ln\, a} + C; \quad \int e^u du = e^u + C;$

4. $\int sin\, udu == -cos\, u + C \quad \left(\int shu \cdot du = chu + C\right);$

5. $\int cos\, udu = sin\, u + C \quad \left(\int chu \cdot du = shu + C\right);$

6. $\int tgudu = -ln|cos\, u| + C;$

7. $\int ctgudu = ln|sin\, u| + C;$

8. $\int \frac{du}{cos^2 u} = tgu + C \quad \left(\int \frac{du}{ch^2 u} = thu + C\right);$

9. $\int \frac{du}{sin^2 u} = -ctgu + C \quad \left(\int \frac{du}{sh^2 u} = -cthu + C\right);$

10. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = arc\, sin \frac{u}{a} + C;$

11. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C;$

12. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{u}{a} + C;$

13. $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \cdot ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + C;$

14. $\int \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{u}{2} \cdot \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} arcsin \frac{u}{a} + C.$

15. $\int \frac{du}{sin\, u} = ln\left|tg \frac{u}{2}\right| + C;$

16. $\int \frac{du}{cos\, u} = ln\left|tg\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C;$

ЛИТЕРАТУРА

1. Амелькин А.А. Дифференциальные уравнения в приложениях. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1987.-160с.
2. Краснов М.Л., Киселёв А.И., Макаренко Г.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения: Задачи и примеры с подробными решениями: Учебное пособие. Изд. 4-е., испр.-М.: Едиториал УРСС, 2002.-256 с. (Вся высшая математика в задачах).
3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для вузов, т. 2: Учебное пособие для вузов.-13-е изд.-М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1985.-560 с.
4. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения: примеры и задачи. Учеб. пособие.–2-е изд., перераб. –М.: Высш.шк., 1989. – 383 с.: ил.
5. Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений: Учебник. Изд. 2-е, испр. М.: КомКнига, 2007. – 240с.
6. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. -Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000, 176 стр.
7. Пушкарь Е.А. Дифференциальные уравнения: Учебное пособие. – М.: МГИУ, 2007. – 254 с.
8. Ефимов А.В., Поспелов А. С., Шостак Р. Я. и др. Сборник задач по математике для втузов. В 4 частях. Ч. 2: Учебное пособие для втузов / Под общ. ред. А. В. Ефимова и А. С. Поспелова. — 4-е изд. перераб. и доп. —М.: Издательство Физико-математической литературы, 2001.— 432с.
9. Конспект лекций по высшей математике: полный курс /Д. Т. Письменный. - 10-е изд., испр. - М.: Айрис-пресс, 2011. - 608 с.: ил. - (Высшее образование).